Zadanie 28. (2pkt) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \leq 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$$

$$2xy + 2xz + 2yz = -x^2 - y^2 - z^2 \quad |:2$$

$$xy + xz + yz = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Suma kwadratów $x^2 + y^2 + z^2$ jest dodatnia, więc

$$-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leq 0$$

czyli

$$xy + xz + yz \leq 0$$