Zadanie 6. (6pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\boldsymbol{x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0}$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste $\boldsymbol{x_1, x_2}$ spełniające warunek $\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2 + x_2^2}$.

1^{o} $\Delta > 0$

2^{o} $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2 + x_2^2$

1^{o}

$\Delta = 4(1-m)^2 - 4(m^2 - m) = 4(1 - 2m + m^2) - 4m^2 + 4m = 4 - 8m + 4m^2 - 4m^2 + 4m =$

$= -4m + 4$

$-4m + 4 > 0$

$-4m > -4 \quad |:(-4)$

$\boldsymbol{m < 1}$

$\boldsymbol{m \in (-\infty; 1)}$

2^{o}

$x_1 \cdot x_2 \le 6m \le (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$m^2 - m \le 6m \le 4(1-m)^2 - 2(m^2 - m)$

Rozłóżmy nierówność na dwie nierówności.

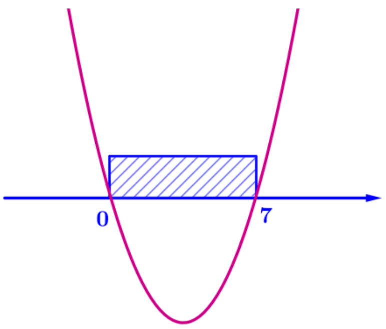
Pierwsza z nich to:

$m^2 - m \le 6m$

$m^2 - 7m \le 0$

$m(m-7) \le 0$

$m = 0 \qquad m = 7$



$m \in \langle 0; 7 \rangle$

Druga nierówność:

$6m \leq 4(1-m)^2 - 2(m^2 - m)$

$6m \leq 4(1 - 2m + m^2) - 2m^2 + 2m$

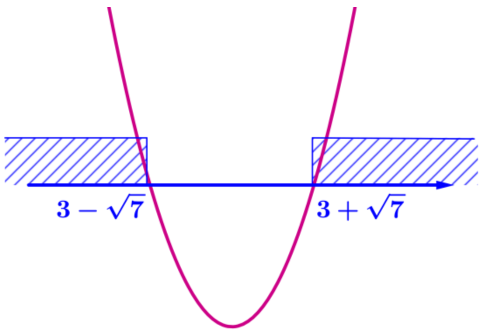
$6m \leq 4 - 8m + 4m^2 - 2m^2 + 2m$

$2m^2 - 12m + 4 \geq 0$

$m^2 - 6m + 2 \geq 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$m_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 - \sqrt{7} \\ \searrow 3 + \sqrt{7} \end{matrix}$



$m \in (-\infty; 3 - \sqrt{7} > \cup < 3 + \sqrt{7}; \infty)$

Część wspólna przypadków: $m \in < 0; 3 - \sqrt{7} >$