CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
OKRĘGOWE KOMISJE EGZAMINACYJNE

# INFORMATOR
# O EGZAMINIE MATURALNYM
# Z **MATEMATYKI**
## OD ROKU SZKOLNEGO 2014/2015

Materiały do *Informatora* opracowano w ramach projektu *Pilotaż nowych egzaminów maturalnych*,
Działanie 3.2. Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych,
Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki.

# INFORMATOR
## O EGZAMINIE MATURALNYM
## Z **MATEMATYKI**
## OD ROKU SZKOLNEGO 2014/2015

opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną
we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi
w Gdańsku, Jaworznie, Krakowie, Łodzi,
Łomży, Poznaniu, Warszawie i we Wrocławiu

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2013

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
ckesekr@cke.edu.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 01
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
ul. Nowa 2, 18-400 Łomża
tel. 86 216 44 95
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
komisja@komisja.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
ul. Grzybowska 77, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

## Spis treści

**Wstęp** ..... **7**

**1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki** ..... **9**

**2. Podstawowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych** ..... **11**

**3. Przykłady zadań wraz z rozwiązaniami i opisem sposobu przyznawania punktów** ..... **14**

**4. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym wraz z rozwiązaniami** ..... **41**

**5. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie rozszerzonym wraz z rozwiązaniami** ..... **65**

**6. Informacja o egzaminie maturalnym z matematyki dla absolwentów niesłyszących** ..... **111**

6.1. Egzamin maturalny z matematyki dla absolwentów niesłyszących ..... 111
6.2. Podstawowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych ..... 112
6.3. Przykłady zadań wraz z rozwiązaniami i opisem sposobu przyznawania punktów ..... 115
6.4. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym dla absolwentów niesłyszących wraz z rozwiązaniami ..... 142
6.4. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie rozszerzonym dla absolwentów niesłyszących wraz z rozwiązaniami ..... 157

**Opinia Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich o informatorach maturalnych od 2015 roku** ..... **173**

# Wstęp

*Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015* jest podzielony na sześć części.

CZĘŚĆ 1. zawiera ogólne informacje dotyczące egzaminu maturalnego z matematyki oraz krótki opis arkuszy egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego i rozszerzonego.

CZĘŚĆ 2. przedstawia podstawowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych wraz z przykładowymi sposobami przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania.

CZĘŚĆ 3. zawiera przykłady zadań otwartych wraz z rozwiązaniami, opisem sposobu przyznawania punktów i uwagami, które mogą być przydatne w głębszym zrozumieniu przedstawionych w części 2. zasad oceniania.

CZĘŚĆ 4. zawiera przykładowe zadania, jakie mogą pojawić się w arkuszach maturalnych na egzaminie z matematyki na poziomie podstawowym. Do każdego zadania:
- przypisano najważniejsze wymagania ogólne i szczegółowe z podstawy programowej kształcenia ogólnego, do których to zadanie się odnosi
- podano przykładowe rozwiązania – jedno lub więcej.

CZĘŚĆ 5. zawiera przykładowe zadania, jakie mogą pojawić się w arkuszach maturalnych na egzaminie z matematyki na poziomie rozszerzonym. Podobnie jak w poprzedniej części do każdego zadania:
- przypisano najważniejsze wymagania ogólne i szczegółowe z podstawy programowej kształcenia ogólnego, do których to zadanie się odnosi,
- podano jedno lub kilka przykładowych rozwiązań.

CZĘŚĆ 6. przedstawia informacje o egzaminie maturalnym dla absolwentów niesłyszących.

Zadania w *Informatorze*:
- nie wyczerpują wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszach egzaminacyjnych,
- nie ilustrują wszystkich wymagań z matematyki zawartych w podstawie programowej.

*Informator* nie może być zatem jedyną ani nawet główną wskazówką do planowania procesu kształcenia matematycznego w szkole ponadgimnazjalnej. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej może zapewnić wszechstronne wykształcenie uczniów szkół ponadgimnazjalnych i ich właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego.

Przed przystąpieniem do dalszej lektury *Informatora* warto zapoznać się z ogólnymi zasadami obowiązującymi na egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2014/2015. Są one określone w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz sposobu przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, z późn. zm.), w tym w szczególności w rozporządzeniu z 25 kwietnia 2013 r. zmieniającym powyższe rozporządzenie (Dz.U. z 2013 r., poz. 520), oraz – w skróconej formie – w części ogólnej *Informatora o egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2014/2015*, dostępnej na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (www.cke.edu.pl) oraz na stronach internetowych okręgowych komisji egzaminacyjnych.

# 1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki

Matematyka jest obecna na sprawdzianie w szkole podstawowej, na egzaminie gimnazjalnym i na maturze. Na egzaminie maturalnym sprawdza się, w jakim stopniu abiturient spełnia wymagania z matematyki w zakresie określonym podstawą programową kształcenia ogólnego dla IV etapu edukacyjnego. Poszczególne zadania zestawu egzaminacyjnego mogą też, w myśl zasady kumulatywności przyjętej w podstawie, odnosić się do wymagań przypisanych do etapów wcześniejszych (I, II oraz III).

Podstawa programowa dzieli wymagania na szczegółowe i ogólne oraz wyodrębnia te, które powinny być zrealizowane na poziomie rozszerzonym. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności. Podstawowe znaczenie mają wymagania ogólne, jako syntetyczne ujęcie nadrzędnych celów kształcenia, stanowiące odpowiedź na pytanie, po co uczymy matematyki; informują, jak rozumieć podporządkowane im wymagania szczegółowe. Poziom opanowania wymagań szczegółowych jest tym wyższy, im lepiej służy osiągnięciu celów określonych w wymaganiach ogólnych.

Egzamin maturalny z matematyki, jako przedmiotu obowiązkowego, jest zdawany na poziomie podstawowym. Jeśli matematyka została wybrana jako przedmiot dodatkowy, egzamin jest zdawany również na poziomie rozszerzonym. Zadania egzaminacyjne z matematyki mogą na obu poziomach mieć formę zamkniętą lub otwartą.

W porównaniu z dotychczasowym egzaminem maturalnym struktura egzaminu na poziomie podstawowym pozostanie bez zmian.

Egzamin na poziomie rozszerzonym zmieni się tak, by lepiej zmierzyć, w jakim stopniu zdający spełniają wymagania ogólne podstawy programowej. W efekcie, mniej będzie rozbudowanych zadań sprawdzających znajomość algorytmów i umiejętność posługiwania się nimi w typowych zastosowaniach, więcej natomiast zadań sprawdzających rozumienie pojęć matematycznych oraz umiejętność dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków. W szczególności oznacza to, że wymagania szczegółowe przypisane w podstawie programowej do wcześniejszych etapów kształcenia mogą pojawić się w nowym kontekście. Dobrym przykładem takiej sytuacji może być zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia pola przekroju ostrosłupa, w szczególności takiego ostrosłupa, który nie jest prawidłowy.

## Opis arkusza dla poziomu podstawowego

Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań.

I grupa zawiera zadania zamknięte. Dla każdego z tych zadań są podane cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0–1. Zdający wskazuje właściwą odpowiedź, zaznaczając swoją decyzję na karcie odpowiedzi.

II grupa zawiera zadania otwarte krótkiej odpowiedzi. Zdający podaje krótkie uzasadnienie swojej odpowiedzi. Zadania z tej grupy punktowane są w skali 0–2.

III grupa zawiera zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Zadania te wymagają starannego zaplanowania strategii rozwiązania oraz przedstawienia sposobu rozumowania i są punktowane w skali 0–4, 0–5 albo 0–6.

## Opis arkusza dla poziomu rozszerzonego

Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań.

I grupa zawiera zadania zamknięte. Dla każdego z tych zadań zdający wskazuje właściwą odpowiedź, zaznaczając swoją decyzję na karcie odpowiedzi. Zadania punktowane są w skali 0-1.

II grupa zawiera zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, w tym zadania z kodowaną odpowiedzią. Zadania te punktowane są w skali 0–2, 0–3 albo 0–4.
W zadaniach z kodowaną odpowiedzią zdający udziela odpowiedzi wpisując żądane cyfry otrzymanego wyniku do odpowiedniej tabeli. Ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź.

III grupa zawiera zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Rozwiązując zadania z tej grupy, zdający w szczególności ma wykazać się umiejętnością rozumowania oraz dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków. Zadania te punktowane są w skali 0–5, 0–6 albo 0–7.

# 2. Podstawowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych

W **zadaniach krótkiej odpowiedzi** zdający otrzymuje 1 lub 2 punkty za rozwiązanie, którego nie doprowadził do końca lub w którym popełnił pewne błędy. Określony jest jednak minimalny postęp, który w tym rozwiązaniu musi być osiągnięty, by otrzymać 1 punkt, oraz określone jest, jak zaawansowane powinno być rozwiązanie, by można było je ocenić na 2 punkty.

W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi zostaje wyróżniona najważniejsza faza, nazywana **pokonaniem zasadniczych trudności zadania**. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za bezbłędne rozwiązanie tego zadania. Tak więc w zadaniu za 4 punkty, za pokonanie zasadniczych trudności, przyznajemy 2 lub 3 punkty (zależnie od zadania). W zadaniu za 5 punktów za tę fazę na ogół przyznajemy 3 punkty. W zadaniach za 6 punktów – na ogół 3 lub 4 punkty. Wyróżnienie w rozwiązaniu zadania rozszerzonej odpowiedzi fazy pokonania zasadniczych trudności zadania powoduje następnie wyróżnienie kilku innych faz. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżniamy jeszcze jedną lub dwie fazy je poprzedzające: dokonanie niewielkiego postępu, który jednak jest konieczny dla rozwiązania zadania oraz dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania. Zdający, który pokonał zasadnicze trudności zadania, mógł na tym poprzestać lub mógł kontynuować rozwiązanie. Wyróżniamy ważną kategorię rozwiązań, w których zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i kontynuował rozwiązanie do końca, jednak w rozwiązaniu popełnił błędy niewpływające na poprawność całego rozumowania (na przykład nieistotne dla całego rozumowania błędy rachunkowe lub niektóre błędy nieuwagi). Analogicznie wyróżniamy kategorię pokonania zasadniczych trudności z nieistotnymi błędami. W każdym przypadku określana jest liczba punktów przyznawana za rozwiązania w każdej (lub niektórych) z powyższych kategorii. Należy podkreślić, że schemat oceniania rozwiązania zadania jest traktowany jako integralna część zadania; na ogół ten schemat oceniania uwzględnia wszystkie typowe sposoby rozwiązania i czasami również niektóre nietypowe.

Zatem w zadaniu za 3 punkty:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ..... 0 pkt
2. rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania ..... 1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie ..... 2 pkt
4. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ..... 3 pkt

Natomiast w zadaniu za 4 punkty:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ..... 0 pkt
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, lub w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki ..... 1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie ..... 2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale rozwiązanie zadania zawiera błędy, usterki ..... 3 pkt
5. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ..... 4 pkt

Poniżej zamieszczone zostały przykładowe sposoby przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania **zadań rozszerzonej odpowiedzi**.

Najprostszy podział punktów za rozwiązanie zadania za 5 punktów wygląda następująco:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ..... 0 pkt
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania ..... 1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy, usterki ..... 2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie ..... 3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) ..... 4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ..... 5 pkt

A oto inny przydział punktów w zadaniu za 5 punktów :

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ..... 0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki ..... 2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie ..... 3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) ..... 4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ..... 5 pkt

Przykładowy sposób przydziału punktów w zadaniu za 6 punktów:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu .....0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .....1 pkt
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .....2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki .....3 pkt
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie .....4 pkt
6. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) .....5 pkt
7. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .....6 pkt

Celem pełniejszego zilustrowania sposobu oceniania zadań otwartych, na następnych stronach zamieszczone zostały przykłady zadań wraz z rozwiązaniami, opisem sposobu przyznawania punktów i uwagami, które mogą być przydatne w głębszym zrozumieniu przedstawionych powyżej reguł oceniania.

# 3. Przykłady zadań wraz z rozwiązaniami i opisem sposobu przyznawania punktów

## Zadanie I (0–3)

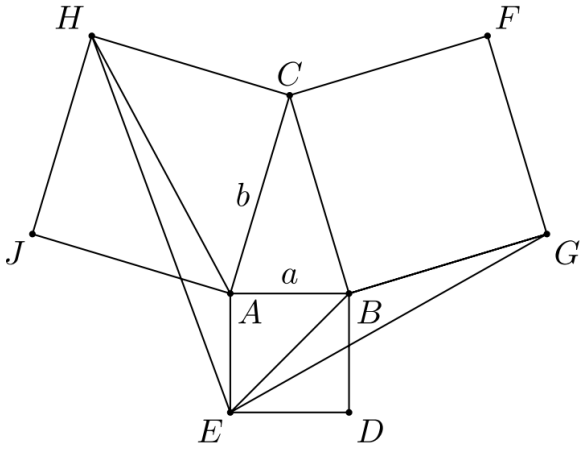
Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny $ABC$, w którym $|AC|=|BC|$. Na bokach, na zewnątrz trójkąta $ABC$, zbudowano kwadraty $ABDE$, $BCFG$ i $ACHJ$. Wykaż, że pola trójkątów $AHE$ i $BEG$ są równe.

**Rozwiązanie**

Omówimy cztery sposoby rozwiązania tego zadania.

**Sposób I** (trygonometryczny)

Przyjmijmy oznaczenia:




$$|AB|=|AE|=a, \quad |AC|=|BC|=|BG|=b, \quad |\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle ABC|=\alpha.$$

Rozwiązanie tym sposobem polega na obliczeniu obu szukanych pól za pomocą $a$, $b$ i $\alpha$. Mamy bowiem:

$$P_{AHE}=\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot|AH|\cdot\sin\sphericalangle EAH,$$

$$P_{BEG}=\frac{1}{2}\cdot|BE|\cdot|BG|\cdot\sin\sphericalangle EBG.$$

Zauważmy, że: $|AE|=a$ oraz $|BG|=b$. Obliczamy długości odcinków $AH$ i $BE$ oraz wyrażamy za pomocą $\alpha$ miary kątów $EAH$ i $EBG$.

Mamy:

$$|AH|=b\sqrt{2},$$

$$|BE|=a\sqrt{2}.$$

Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny i ostrokątny, więc $\alpha > 45°$. Następnie

$$|\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAH| = 90° + \alpha + 45° = 135° + \alpha > 135° + 45° = 180°,$$

a więc kąt wypukły *EAH* jest równy

$$360° - (135° + \alpha) = 225° - \alpha.$$

Podobnie,

$$|\sphericalangle GBC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle EBA| = 90° + \alpha + 45° = 135° + \alpha > 135° + 45° = 180°,$$

a więc kąt wypukły *EBG* jest równy

$$360° - (135° + \alpha) = 225° - \alpha.$$

Zatem

$$|\sphericalangle EAH| = 225° - \alpha = |\sphericalangle EBG|.$$

Stąd otrzymujemy

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin EAH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sqrt{2} \cdot \sin(225° - \alpha)$$

oraz

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin EBG = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot b \cdot \sin(225° - \alpha).$$

Stąd wynika, że $P_{AHE} = P_{BEG}$, co kończy dowód.

**Komentarz**

Rozwiązanie składa się z trzech kroków: obliczenie długości boków *AH* i *BE*, wykazanie równości kątów *EAH* i *EBG* (np. przez wyznaczenie obu kątów za pomocą $\alpha$) oraz zastosowanie wzoru na pole trójkąta.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu wszystkich wielkości potrzebnych we wzorach na pole. Jeden z możliwych błędów zdających, na który należy zwrócić tu uwagę, może polegać na złym zastosowaniu wzoru na pole trójkąta (np. pominięcie współczynnika $\frac{1}{2}$). Pomimo tego błędu zdający otrzymuje poprawny wynik.

W takim przypadku uznajemy rozwiązanie za niedokończone – bezbłędnie zostały pokonane tylko zasadnicze trudności zadania. W tym rozwiązaniu trudno oczekiwać wielu innych rozwiązań błędnych; maturzysta na ogół nie popełni błędu przy obliczaniu przekątnej kwadratu czy dodawaniu miar kątów. Można natomiast spodziewać się rozwiązań częściowych, np. niedokończonych. Niektóre takie rozwiązania omawiamy w uwagach zamieszczonych po schemacie oceniania.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Obliczenie długości boków $AH$ i $BE$ za pomocą boków $AB$ i $AC$

lub

wykazanie, że $\left|\sphericalangle EAH\right| = \left|\sphericalangle EBG\right|$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie długości boków $AH$ i $BE$ za pomocą boków $AB$ i $AC$ oraz wykazanie, że $\left|\sphericalangle EAH\right| = \left|\sphericalangle EBG\right|$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Wykazanie, że pola obu trójkątów są równe.

**Uwagi**

Zdający może wykonać obliczenia związane tylko z jednym z dwóch trójkątów i na tym poprzestać. Na przykład w przypadku trójkąta $AHE$ może wykonać następujące obliczenia (przy zachowaniu oznaczeń z powyższego rozwiązania, $\left|AB\right| = a, \left|AC\right| = b, \left|\sphericalangle BAC\right| = \alpha$):

- $\left|AH\right| = b\sqrt{2}$;
- $\left|\sphericalangle EAH\right| = 225^\circ - \alpha$;
- $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(225^\circ - \alpha\right)$.

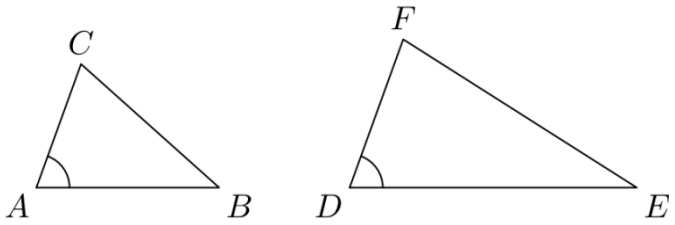
Wówczas:

- jeśli zdający wyznaczy tylko długość boku $AH$ lub miarę kąta $EAH$, to takie rozwiązanie nie jest jeszcze traktowane jako istotny postęp i przyznajemy za nie 0 punktów,
- jeśli zdający wyznaczy długość boku $AH$ i miarę kąta $EAH$, to takie rozwiązanie częściowe traktujemy jako „istotny postęp” i przyznajemy za nie 1 punkt,
- jeśli zdający wyznaczy bok $AH$ i zapisze pole w postaci $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot ab\sqrt{2} \cdot \sin \sphericalangle EAH$, nie wyznaczając przy tym kąta $EAH$ za pomocą kąta $\alpha$, to takie rozwiązanie częściowe traktujemy także jako „istotny postęp” i przyznajemy za nie 1 punkt,
- jeśli zdający wyznaczy bok $AH$, wyznaczy kąt $EAH$ za pomocą kąta $\alpha$ i zapisze pole trójkąta $AHE$ w postaci $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot ab\sqrt{2} \cdot \sin\left(225^\circ - \alpha\right)$, to traktujemy takie rozwiązanie jako pokonanie zasadniczych trudności zadania i przyznajemy za nie 2 punkty.

**Sposób II** (stosunek pól)

W tym rozwiązaniu korzystamy z następującej własności trójkątów:

Dane są dwa trójkąty $ABC$ i $DEF$ takie, że $\sphericalangle A = \sphericalangle D$




Wówczas

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

Powyższa proporcja wyraża w sposób czysto geometryczny tę samą treść co wzór trygonometryczny na pole trójkąta. Mianowicie mamy:

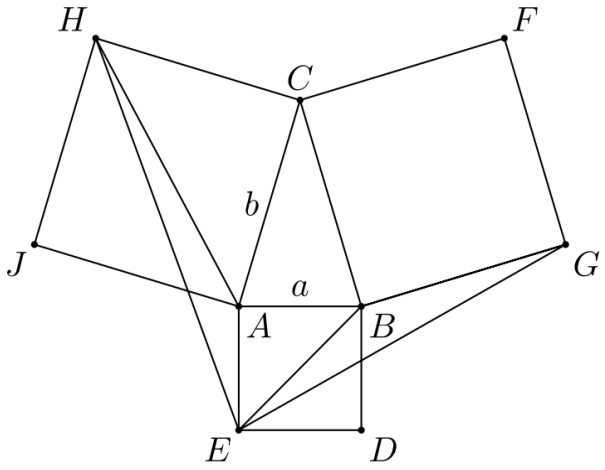
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A$$

oraz

$$P_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin D\,.$$

Sformułowanie geometryczne pozwala przeprowadzić dowód bez odwoływania się do trygonometrii.

Tak jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.




Następnie korzystamy ze wspomnianej wyższej własności trójkątów:

$$\frac{P_{AHE}}{P_{BEG}} = \frac{|AE| \cdot |AH|}{|BE| \cdot |BG|} = \frac{|AE| \cdot |AC| \cdot \sqrt{2}}{|AB| \cdot \sqrt{2} \cdot |BG|} = \frac{|AE|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|BG|} = 1\,,$$

co dowodzi, że $P_{AHE} = P_{BEG}$.

Przy zachowaniu oznaczeń z poprzedniego sposobu rozwiązania, możemy to rozwiązanie zapisać w sposób następujący. Przyjmujemy $|AB| = a$ i $|AC| = b$. Wówczas $|AH| = b\sqrt{2}$ oraz $|EB| = a\sqrt{2}$. Tak jak w sposobie I, pokazujemy, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$. Korzystając z twierdzenia o stosunku pól, otrzymujemy

$$\frac{P_{AHE}}{P_{BEG}} = \frac{|AE| \cdot |AH|}{|BE| \cdot |BG|} = \frac{a \cdot b\sqrt{2}}{a \cdot b\sqrt{2}} = 1,$$

co dowodzi, że $P_{AHE} = P_{BEG}$.

**Komentarz**

W tym sposobie rozwiązania podstawowym zadaniem jest – tak jak w sposobie pierwszym – obliczenie długości odcinków *AH* i *BE* oraz wykazanie równości kątów *EAH* i *EBG*. Dlatego schemat oceniania może być taki sam, jak w sposobie I. Uwagi dotyczące rozwiązań niekompletnych są takie same jak w przypadku sposobu I.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Obliczenie długości boków *AH* i *BE* za pomocą boków *AB* i *AC*

lub

wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie długości boków *AH* i *BE* za pomocą boków *AB* i *AC* oraz wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Wykorzystanie wzoru trygonometrycznego do obliczenia pól obu trójkątów i wykazania, że te pola są równe.

**Uwaga**

Jeśli zdający wykonuje obliczenia tylko w jednym z rozważanych trójkątów, to w istocie rozwiązuje zadanie sposobem pierwszym i możemy zastosować rozstrzygnięcia zawarte w uwadze do schematu oceniania w sposobie I.

**Sposób III** (geometria analityczna)

Rozwiązanie zadania sposobem analitycznym składa się z trzech kroków. Po pierwsze, w wygodny sposób umieszczamy rozważane figury geometryczne w układzie współrzędnych – lub równoważnie – do istniejących figur dobieramy układ współrzędnych. Po drugie, w przyjętym układzie współrzędnych obliczamy współrzędne potrzebnych punktów. Wreszcie, za pomocą obliczonych współrzędnych, obliczamy wielkości, o które chodzi w zadaniu.

W naszym przypadku te kroki sprowadzają się do:

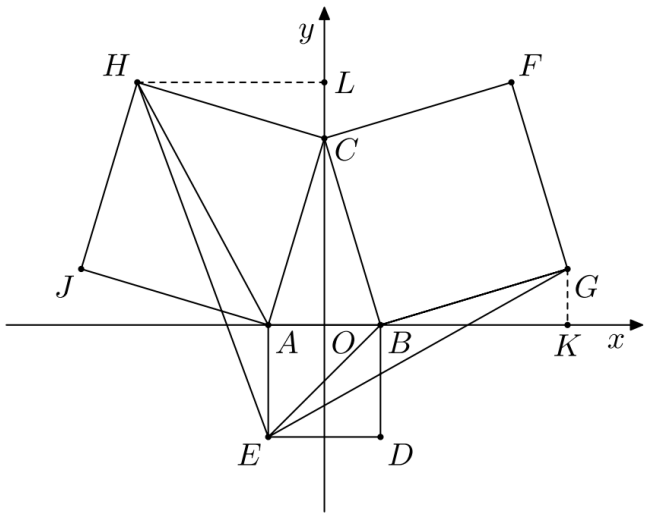
- wyboru układu współrzędnych;
- obliczenia współrzędnych wierzchołków trójkątów *AHE* i *BEG*;
- obliczenia pól trójkątów *AHE* i *BEG*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu współrzędnych wierzchołków trójkątów *AHE* i *BGE*.

Popatrzmy teraz, w jaki sposób można przeprowadzić takie rozwiązanie. Najpierw musimy wybrać układ współrzędnych. Można to zrobić na wiele sposobów; trudności obliczeniowe zadania będą zależały od sposobu wyboru układu. Jednym z najwygodniejszych sposobów jest wybór układu współrzędnych uwzględniający naturalne symetrie figur występujących w zadaniu. W naszym przypadku wybieramy układ tak, by oś *Oy* zawierała oś symetrii trójkąta równoramiennego *ABC*. Umieszczamy zatem trójkąt *ABC* w układzie współrzędnych tak, że

$$A=(-a,0),\quad B=(a,0),\quad C=(0,h),$$

gdzie $a>0$ i $h>0$. Ponieważ trójkąt *ABC* jest ostrokątny, więc $|\sphericalangle BAC|>45^\circ$, skąd wynika, że $a<h$.




Wyznaczamy teraz współrzędne punktów *E*, *G* i *H*. Oczywiście bok *AB* ma długość 2*a*, skąd wynika, że $E=(-a,-2a)$. Współrzędne punktów *G* i *H* możemy wyznaczyć wieloma sposobami. Pokażemy dokładnie dwa z nich i zasygnalizujemy trzeci sposób, znacznie bardziej pracochłonny.

- Korzystamy z tego, że jeśli obrócimy wektor $[x,y]$ o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to otrzymamy wektor $[y,-x]$. (Tę własność można łatwo odczytać z rysunku.) W naszym zadaniu mamy $\overrightarrow{CA}=[-a,-h]$, skąd $\overrightarrow{CH}=[-h,a]$. Stąd dostajemy $H=C+\overrightarrow{CH}=(0,h)+[-h,a]=(-h,a+h)$.

  W podobny sposób:

  $$\overrightarrow{BC}=[-a,h],\quad \overrightarrow{BG}=[h,a],\quad G=(a+h,a).$$

- Niech $K$ będzie rzutem punktu $G$ na oś $Ox$ i niech $L$ będzie rzutem punktu $H$ na oś $Oy$. Wówczas trójkąty $CLH$ i $GKB$ są przystające do trójkąta $AOC$, skąd

  $$|CL|=|GK|=a,\quad |HL|=|BK|=h.$$

  To daje współrzędne punktów $G=(a+b,a)$ i $H=(-h,a+h)$.

- Wyznaczamy równanie prostej $AC$: $y=\frac{h}{a}x+h$ oraz równanie prostej prostopadłej do niej, przechodzącej przez punkt $C$: $y=-\frac{a}{h}x+h$. Następnie na tej prostej prostopadłej znajdujemy oba punkty odległe od punktu $C$ o długość odcinka $AC$; jest to najbardziej pracochłonna część zadania. Wreszcie wybieramy ten z otrzymanych dwóch punktów, który ma ujemną współrzędną $x$. W podobny sposób możemy wyznaczyć współrzędne punktu $G$.

Następnie obliczamy pola trójkątów $AHE$ i $BEG$. Możemy skorzystać ze wzoru znajdującego się w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych*. Jeśli wierzchołki trójkąta $KLM$ mają współrzędne

$$K=(x_K,y_K),\quad L=(x_L,y_L),\quad M=(x_M,y_M),$$

to pole wyraża się wzorem

$$P_{KLM}=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_L-x_K)(y_M-y_K)-(y_L-y_K)(x_M-x_K)\right|.$$

W naszym przypadku mamy

$$E=(-a,-2a),\quad A=(-a,0),\quad H=(-h,a+h),$$

skąd dostajemy

$$P_{AHE}=\frac{1}{2}\cdot\left|(-a+a)(a+h+2a)-(0+2a)(-h+a)\right|=\left|-a(a-h)\right|=a(h-a).$$

Podobnie,

$$E=(-a,-2a),\quad B=(a,0),\quad G=(a+h,a),$$

skąd dostajemy

$$P_{BEG}=\frac{1}{2}\cdot\left|(a+a)(a+2a)-(0+2a)(a+h+a)\right|=\frac{1}{2}\left|6a^2-4a^2-2ah\right|=a(h-a).$$

To kończy dowód.

Zauważmy też, że pole trójkąta $AHE$ można obliczyć prościej: podstawa $AE$ ma długość $2a$, wysokość (niezaznaczona na rysunku) ma długość $h-a$.

**Uwaga**

Pola trójkątów można też obliczyć inaczej. Można np. wyznaczyć długość jednego boku, równanie prostej zawierającej ten bok oraz odległość trzeciego wierzchołka od tej prostej (odpowiednie wzory także znajdują się w tablicach).

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Umieszczenie trójkąta $ABC$ w układzie współrzędnych i podanie współrzędnych jego wierzchołków.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktów $E$, $G$ i $H$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

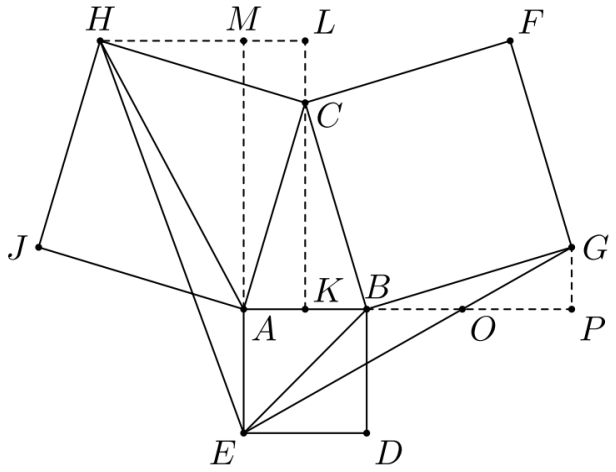
Obliczenie pól trójkątów $AHE$ i $BEG$ np. za pomocą wzorów znajdujących się w tablicach i zauważenie, że te pola są równe.

**Uwaga**

Zdający rozwiązujący zadanie tym sposobem mogą popełnić bardzo wiele różnych błędów: na przykład źle wyznaczyć współrzędne punktów $E$, $G$ i $H$ lub źle obliczyć pola trójkątów. Mogą wreszcie wybrać takie metody obliczania pól, że nie będzie oczywiste, czy otrzymane wyniki są równe (może to wymagać odpowiednich przekształceń). Niezależnie od charakteru i przyczyny błędu, schemat oceniania wyraźnie wskazuje, jaką liczbę punktów należy przyznać zdającemu. Maksymalną liczbę punktów zdający otrzymuje za bezbłędnie wykonane kroki. Może się jednak zdarzyć, że zdający popełni nieistotny błąd rachunkowy przy wyznaczaniu współrzędnych któregoś punktu i w ten sposób uzyska błędne wyniki w ostatnim kroku. Jeśli jednak metoda obliczania pól trójkątów jest poprawna, zostały dokonane poprawne podstawienia do wzorów, zgodne z otrzymanymi wynikami obliczeń oraz obliczenia w tym kroku zostały wykonane poprawnie, to zdający otrzymuje 2 punkty (jest to sytuacja, w której zdający doprowadza rozwiązanie do końca, popełniając nieistotny błąd rachunkowy podczas pokonywania zasadniczych trudności).

**Sposób IV** (bezpośrednie obliczenie pól)

Prowadzimy w trójkącie *ABC* wysokość *CK*. Następnie niech punkt *L* będzie rzutem prostokątnym punktu *H* na prostą *KC* i niech punkt *P* będzie rzutem prostokątnym punktu *G* na prostą *AB*.




Wówczas nietrudno zauważyć, że trójkąty *CLH* i *BPG* są przystające do trójkątów *AKC* i *BKC*. Mianowicie $|CH|=|AC|=|BC|=|BG|$. Jeśli następnie

$$\alpha=|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle ABC|,$$

to $|\sphericalangle ACK|=90^\circ-\alpha$, $|\sphericalangle HCL|=\alpha$ oraz $|\sphericalangle CHL|=90^\circ-\alpha$. Podobnie, $|\sphericalangle BCK|=\alpha$, $|\sphericalangle GBP|=90^\circ-\alpha$ oraz $|\sphericalangle BGP|=\alpha$. Wspomniane przystawania trójkątów wynikają teraz z cechy przystawania *kbk*.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$a=|AK|=|BK|,\quad h=|CK|.$$

Wówczas $|HL|=|BP|=h$ oraz $|CL|=|GP|=a$. Ponadto $a<h$. Niech następnie punkt *M* będzie rzutem prostokątnym punktu *A* na prostą *HL*. Ponieważ $a<h$, więc punkt *M* leży wewnątrz odcinka *HL*. Możemy już obliczyć pole trójkąta *EAH*. Mianowicie

$$P_{AHE}=\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot|HM|=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(h-a)=a(h-a).$$

Następnie niech punkt *O* będzie punktem przecięcia prostych *EG* i *AP*. Z podobieństwa trójkątów *EAO* i *GPO* wynika, że

$$\frac{|AO|}{|PO|}=\frac{|AE|}{|PG|}=\frac{2a}{a}=2.$$

Zatem

$$|AO|=\frac{2}{3}\cdot|AP|=\frac{2}{3}\cdot(2a+h),$$

skąd wynika, że

$$|BO| = |AO| - |AB| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h) - 2a = \frac{2}{3} \cdot (h - a).$$

Wreszcie

$$P_{EBG} = P_{EBO} + P_{GBO} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |AE| + \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |GP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (h - a) \cdot (2a + a) = a(h - a).$$

To kończy dowód.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Dorysowanie trójkątów *CLH* i *GPB* oraz zauważenie, że są one przystające do trójkąta *AKC* (lub *BKC*). Nie wymagamy w tym miejscu od zdającego pełnego dowodu przystawania – przyjmujemy, że uzasadnienie przystawania jest oczywiste.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie pola jednego z trójkątów *AHE* i *BEG*.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Obliczenie pól obu trójkątów i stwierdzenie, że są one równe.

**Uwaga**

W takim sposobie rozwiązania zadania jest mało prawdopodobne, by zdający popełnił istotny błąd. Mogą się natomiast zdarzyć rozwiązania niedokończone. Mogą też wystąpić różne inne próby rozwiązania polegające na dorysowywaniu do rysunku różnych odcinków. Jeśli nie jest wyraźnie widoczny cel takich poszukiwań i nie został on wyraźnie wskazany w rozwiązaniu, to zdający otrzymuje 0 punktów.

## Zadanie II (0–5)

Ile jest nieparzystych liczb naturalnych trzycyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątką?

### Rozwiązanie

Omówimy 6 sposobów rozwiązania tego zadania.

**Sposób I** (umieszczenie dziewiątki)

W tym sposobie rozwiązania pokażemy najpierw rozumowanie błędne polegające na policzeniu kilkakrotnym tych samych liczb. Wskazany błąd jest niezwykle często popełniany przez zdających rozwiązujących to zadanie; można go jednak dość łatwo naprawić. Wystarczy odjąć liczbę tych liczb, które były policzone dwukrotnie i odjąć podwojoną liczbę tych liczb, które były policzone trzykrotnie. Obliczenie, ile należy odjąć, jest dość łatwe. Problem polega jednak na tym, że zdający popełniający ten błąd nie zdają sobie sprawy z tego, na czym on polega – nie dostrzegają, że niektóre liczby policzyli wielokrotnie.

A oto rozwiązanie. Wiemy, że jedną z cyfr jest 9; możemy ją umieścić na jednym z trzech miejsc: pierwszym, drugim lub trzecim.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 10 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 50 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 45 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na drugim dowolną z 10 cyfr. Łącznie daje to w tym przypadku 90 liczb.

W sumie daje to $50+45+90=185$ liczb.

Które liczby zostały policzone wielokrotnie? Popatrzmy na przykład. Przypuśćmy, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na pierwszym miejscu, a na pozostałych miejscach umieściliśmy kolejno cyfry 5 i 9. Otrzymaliśmy liczbę 959. Przypuśćmy teraz, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na trzecim miejscu, a następnie umieściliśmy na pierwszych dwóch miejscach kolejno cyfry 9 i 5. Znów otrzymaliśmy liczbę 959. Ta liczba została więc w powyższym sposobie zliczania policzona dwukrotnie. Zobaczmy teraz, w jaki sposób można poprawić to rozwiązanie błędne.

Dostaliśmy wynik 185. Zauważmy jednak, że liczby z dwiema dziewiątkami były policzone po dwa razy, a liczba 999 nawet trzy razy. Zliczamy teraz liczby z dwiema dziewiątkami.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8).
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8).

W sumie okazuje się, że mamy 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Od otrzymanego wyniku musimy zatem odjąć 21. Następnie mamy jedną liczbę (mianowicie 999) z trzema dziewiątkami. Policzyliśmy ją trzykrotnie, więc od otrzymanego wyniku musimy jeszcze odjąć 2. Zatem liczb, które nas interesują, jest $185-21-2=162$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Pokazane na początku rozwiązanie błędne zawiera istotne elementy rozumowania prawidłowego, więc powinno być ocenione jako rozwiązanie częściowe. Uznajemy je za ,,istotny postęp".

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb, lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb.

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb, przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb i przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb. Nie wymagamy, by w tej kategorii otrzymał wynik łączny 185 liczb.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający otrzyma wynik 185 liczb, następnie zauważy, że pewne liczby policzono wielokrotnie oraz obliczy, że 21 liczb policzono dwukrotnie. Za samo zauważenie, że pewne liczby zostały policzone wielokrotnie, bez podania prawidłowej ich liczby (na przykład w wyniku błędnego obliczenia), zdający otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania, zauważy, że liczba 999 była policzona trzykrotnie i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+45+90-21-2=162.$$

**Sposób II** (pierwsza dziewiątka)

Wszystkie interesujące nas liczby dzielimy na trzy grupy i policzymy liczby w każdej grupie.

- Do pierwszej grupy zaliczamy liczby zaczynające się dziewiątką.
- Do drugiej grupy zaliczamy liczby, w których pierwsza dziewiątka znajduje się na drugim miejscu.
- Do trzeciej grupy zaliczamy liczby, w których pierwsza dziewiątka znajduje się na trzecim miejscu.

Teraz zliczamy liczby znajdujące się w tych grupach.

- W pierwszej grupie znajduje się 50 liczb: na pierwszym miejscu jest dziewiątka, na drugim dowolna z 10 cyfr i na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W drugiej grupie znajduje się 40 liczb: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (nie może być 0 i 9), na drugim miejscu jest dziewiątka i na trzecim jedna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W trzeciej grupie znajdują się 72 liczby: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (jak wyżej), na drugim jedna z 9 cyfr (nie może być 9) i na trzecim miejscu znajduje się dziewiątka.

Łącznie mamy zatem 162 liczby.

**Komentarz**

Zdający rozwiązujący zadanie tą metodą zdaje sobie prawdopodobnie sprawę z niebezpieczeństwa policzenia tych samych liczb wielokrotnie i prawdopodobnie nie popełni większych błędów. Możliwe są natomiast drobne błędy rachunkowe.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Zdający prawidłowo zdefiniuje trzy grupy liczb.

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy, ile jest liczb w co najmniej jednej z tych trzech grup.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający prawidłowo obliczy, ile jest liczb w każdej z tych trzech grup. Za prawidłowy wynik w dwóch grupach zdający otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+40+72=162.$$

**Sposób III** (liczba dziewiątek)

Najpierw policzymy liczby, w których jest tylko jedna cyfra 9. Tym razem zastosujemy metodę znaną z powyższego błędnego rozwiązania, jednak użycie tej metody będzie poprawne, gdyż jest tylko jedna cyfra 9. Możemy umieścić ją na jednym z trzech miejsc.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 36 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 32 liczby.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku 72 liczby.

W sumie daje to $36+32+72=140$ liczb.

Teraz policzymy liczby, w których są dwie cyfry 9.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr.

W sumie daje to $4+8+9=21$ liczb.

Wreszcie mamy jedną liczbę z trzema dziewiątkami: 999.

Mamy więc $140+21+1=162$ liczby.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką lub obliczenie, że istnieje 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Każde z tych obliczeń wymaga rozpatrzenia trzech przypadków w zależności od położenia dziewiątek. Zdający otrzymuje **1 punkt**, jeśli prawidłowo rozpatrzy dwa z tych trzech przypadków i na tym poprzestanie lub popełni błąd w trzecim obliczeniu lub w obliczeniu sumy.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Obliczenie, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką i istnieje 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Jeśli zdający poprawnie wykona jedno z tych obliczeń, a w drugim popełni błąd taki jak opisany w poprzedniej kategorii, to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Podanie pełnej odpowiedzi. Jeśli zdający poprawnie obliczy, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką lub 21 liczb z dwiema dziewiątkami, drugie z tych obliczeń doprowadzi do końca z błędem w jednym z trzech przypadków, następnie zauważy, że istnieje dokładnie jedna liczba z trzema dziewiątkami i poprawnie doda otrzymane liczby – uzyskując w efekcie wynik błędny – otrzymuje **4 punkty**.

**Sposób IV** (uzupełnianie)

Najpierw policzymy wszystkie liczby trzycyfrowe nieparzyste. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest 900; co druga jest nieparzysta. Istnieje zatem 450 liczb trzycyfrowych nieparzystych. Możemy również rozumować następująco: na pierwszym miejscu można umieścić jedną z dziewięciu cyfr, na drugim jedną z dziesięciu cyfr, a na trzecim jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Łącznie mamy zatem $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ liczb. Teraz policzymy wszystkie liczby nieparzyste, w których nie występuje cyfra 9. Tym razem na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), na drugim jedną z dziewięciu cyfr (od 0 do 8), a na trzecim jedną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7; łącznie mamy zatem $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$ liczb. Liczby, o które chodzi w zadaniu, to oczywiście liczby **należące** do pierwszej grupy (wszystkie liczby nieparzyste) i **nienależące** do drugiej grupy (w której są liczby nieparzyste **bez** dziewiątki). Stąd wynika, że liczb, o które chodzi w zadaniu, jest $450 - 288 = 162$.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Obliczenie liczby liczb trzycyfrowych: 900.

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie liczby nieparzystych liczb trzycyfrowych: 450. Jeśli zdający oblicza tę liczbę metodą rozmieszczania cyfr i popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli zdający stwierdzi, że istnieje 899 liczb trzycyfrowych i jako liczbę nieparzystych liczb trzycyfrowych poda liczbę 449 lub 450, to otrzymuje **1 punkt**.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Obliczenie liczby nieparzystych liczb trzycyfrowych niezawierających cyfry 9: jest 288 liczb. Jeżeli zdający obliczy poprawnie liczbę nieparzystych liczb trzycyfrowych niezawierających cyfry 9, ale popełni błąd opisany w kategorii ,,istotny postęp", to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający otrzyma prawidłowy wynik (162 liczby), nie popełniając przy tym błędu (np. opisanego w kategorii ,,istotny postęp"). W przypadku gdy popełni taki błąd, otrzymuje **4 punkty**.

**Sposób V** (zasada włączeń i wyłączeń)

Niektórzy zdający mogą zastosować w rozwiązaniu zasadę włączeń i wyłączeń, choć nie ma jej w podstawie programowej – mogli ją na przykład odkryć samodzielnie jako regułę niemal oczywistą intuicyjnie.

Niech $A$ będzie zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na pierwszym miejscu, $B$ zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na drugim miejscu i wreszcie $C$ zbiorem nieparzystych z dziewiątką na trzecim miejscu. Zbiorem liczb, które nas interesują, jest oczywiście zbiór $A \cup B \cup C$. Nietrudno teraz zauważyć, że:

$$|A| = 50,\ |B| = 45,\ |C| = 90$$

$$|A \cap B| = 5,\ |A \cap C| = 10,\ |B \cap C| = 9$$

$$|A \cap B \cap C| = 1$$

Z zasady włączeń i wyłączeń dostajemy

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 50 + 45 + 90 - 5 - 10 - 9 + 1 = 162.$$

**Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Zdający zdefiniuje zbiory $A$, $B$ i $C$ i zauważy, że ma obliczyć $|A \cup B \cup C|$.

**Postęp większy ..... 2 pkt**

Zdający obliczy $|A|$, $|B|$ i $|C|$.

**Istotny postęp ..... 3 pkt**

Zdający obliczy $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ i $|A \cap B \cap C|$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i podstawi do niego prawidłowe dane. Jeśli zdający zdefiniuje zbiory $A$, $B$ i $C$, poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i poprawnie obliczy co najmniej $|A|$, $|B|$ i $|C|$ oraz popełni błędy w pozostałych obliczeniach, to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

**Uwaga**

Jeśli zdający tylko zdefiniuje zbiory $A$, $B$ i $C$ oraz poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń, to otrzymuje **2 punkty**.

**Sposób VI** (wypisywanie liczb w kolejności rosnącej)

Ten sposób rozwiązania, z pozoru nierozsądny, może jednak naprowadzić zdającego na stosunkowo proste rozwiązanie. Oczywiście wypisywanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania nie może być dokonywane bez zastanowienia. Nie chodzi zatem o wypisanie w kolejności rosnącej wszystkich liczb trzycyfrowych (jest ich 900), wykreślenie liczb parzystych oraz liczb, w których nie występuje dziewiątka i zliczeniu liczb niewykreślonych. Jeśli zdający nie popełni błędu, powinien otrzymać 162 liczby. Oczywiście takie rozwiązanie, wykonane bezbłędnie, powinno być ocenione na 5 punktów.

Zdający może również wypisywać w kolejności rosnącej tylko właściwe liczby. Oto poprawny wynik:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 109 | 119 | 129 | 139 | 149 | 159 | 169 | 179 | 189 |
| 191 | 193 | 195 | 197 | 199 | | | | |
| 209 | 219 | 229 | 139 | 249 | 259 | 269 | 279 | 289 |
| 291 | 293 | 295 | 297 | 299 | | | | |
| 309 | 319 | 329 | 339 | 349 | 359 | 369 | 379 | 389 |
| 391 | 393 | 395 | 397 | 399 | | | | |
| 409 | 419 | 429 | 439 | 449 | 459 | 469 | 479 | 489 |
| 491 | 493 | 495 | 497 | 499 | | | | |
| 509 | 519 | 529 | 539 | 549 | 559 | 569 | 579 | 589 |
| 591 | 593 | 595 | 597 | 599 | | | | |
| 609 | 619 | 629 | 639 | 649 | 659 | 669 | 679 | 689 |
| 691 | 693 | 695 | 697 | 699 | | | | |
| 709 | 719 | 729 | 739 | 749 | 759 | 769 | 779 | 789 |
| 791 | 793 | 795 | 797 | 799 | | | | |
| 809 | 819 | 829 | 839 | 849 | 859 | 869 | 879 | 889 |
| 891 | 893 | 895 | 897 | 899 | | | | |
| 901 | 903 | 905 | 907 | 909 | | | | |
| 911 | 913 | 915 | 917 | 919 | | | | |
| 921 | 923 | 925 | 927 | 929 | | | | |
| 931 | 933 | 935 | 937 | 939 | | | | |
| 941 | 943 | 945 | 947 | 949 | | | | |
| 951 | 953 | 955 | 957 | 959 | | | | |
| 961 | 963 | 965 | 967 | 969 | | | | |
| 971 | 973 | 975 | 977 | 979 | | | | |
| 981 | 983 | 985 | 987 | 989 | | | | |
| 991 | 993 | 995 | 997 | 999 | | | | |

W pierwszych 16 wierszach mamy ośmiokrotnie wiersz z 9 liczbami i wiersz z 5 liczbami. W następnych 10 wierszach mamy po 5 liczb. Łącznie zatem wypisano

$$8\cdot(9+5)+10\cdot 5=162$$

liczby.

W trakcie wypisywania możemy zauważyć regułę i ją opisać: najpierw występują liczby zaczynające się od cyfry różnej od 9 (mamy tu 8 możliwości). Dla każdej takiej pierwszej cyfry $c$ mamy 9 liczb postaci

$$c09,\quad c19,\quad c29,\quad c39,\quad c49,\quad c59,\quad c69,\quad c79,\quad c89,$$

po których przychodzi 5 liczb postaci

$$c91,\quad c93,\quad c95,\quad c97,\quad c99.$$

Dla każdej cyfry $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ wypiszemy w ten sposób 14 liczb. To łącznie daje $8 \cdot 14 = 112$ liczb. Następnie wypisujemy liczby zaczynające się od dziewiątki. Warunek mówiący, że w zapisie liczby występuje dziewiątka, jest teraz spełniony; na drugim miejscu może zatem wystąpić dowolna z 10 cyfr, a na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 2, 5, 7, 9. To daje łącznie 50 liczb, a więc ostatecznie dostajemy 162 liczby.

**Komentarz**

Zdający mogą próbować wypisywać liczby w różnej kolejności, stosując różne strategie. W przypadku gdy zdający wyłącznie wypisuje liczby i podaje ostateczną odpowiedź, uznajemy tylko rozwiązania całkowicie bezbłędne: odpowiedź 162 popartą poprawną listą liczb. Za takie rozwiązanie zdający powinien otrzymać **5 punktów**. Za rozwiązania polegające na wypisywaniu liczb, niezawierające wyjaśnień i prowadzące do błędnej odpowiedzi zdający powinien otrzymać **0 punktów**. Jeśli zdający poda odpowiedź poprawną (162 liczby) bez jakiegokolwiek uzasadnienia, to za takie rozwiązanie można otrzymać co najwyżej **1 punkt**. Jeśli natomiast poprawna odpowiedź jest poparta nieprawidłową listą liczb, to zdający otrzymuje **0 punktów**.

Metoda polegająca na wypisywaniu liczb może – jak widzieliśmy wyżej – prowadzić do trafnych uogólnień. Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na dokonaniu dwóch obserwacji: dla każdej cyfry różnej od 0 i 9 mamy 14 interesujących nas liczb zaczynających się tą cyfrą oraz dla cyfry 9 mamy 50 liczb zaczynających się tą cyfrą.

**Schemat oceniania VI sposobu rozwiązania**

Jeśli zdający opisze regułę prowadzącą do wypisania poprawnej listy, to przyznajemy punkty według następującego schematu:

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

- Zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest różna od 9, to mamy 14 liczb

lub

- zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest dziewiątką, to mamy 50 liczb.

Uznajemy w tej kategorii rozwiązania, w których zdający wypisze w wyraźnie wyodrębnionej grupie 14 liczb zaczynających się np. od jedynki i wskaże (np. za pomocą trzech kropek), że ta sama reguła obowiązuje dla pozostałych pierwszych cyfr różnych od dziewiątki. Uznajemy także rozwiązania, w których zdający wyłącznie obliczy, że jest 50 liczb nieparzystych zaczynających się od dziewiątki.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający zauważy obie reguły opisane w poprzedniej kategorii.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i ponadto poprawnie obliczy liczbę wszystkich rozważanych liczb: $8 \cdot 14 + 50 = 162$.

**Uwaga**

W tej metodzie rozwiązania zdający może popełnić wiele błędów. Na przykład może, wypisując liczby zaczynające się cyfrą 1, nie zauważyć, że liczba 199 pojawia się dwukrotnie: raz w ciągu 10 liczb

$$109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199$$

i drugi raz w ciągu liczb

$$191, 193, 195, 197, 199.$$

Jeśli zdający wyłącznie zauważy, że istnieje 15 liczb zaczynających się od cyfry różnej od 9, powinien otrzymać 1 punkt. Inny błąd może polegać na złym obliczeniu, ile jest liczb zaczynających się od dziewiątki. Zdający może na przykład zapomnieć, że rozważamy wyłącznie liczby nieparzyste i przyjmie, że istnieje 100 takich liczb. Za taką obserwację też powinien otrzymać 1 punkt. Te błędy mogą prowadzić do następujących błędnych odpowiedzi:

$$8 \cdot 15 + 50 = 170$$

oraz

$$8 \cdot 14 + 100 = 192.$$

Za doprowadzenie rozwiązania do końca z jednym z tych dwóch błędów zdający powinien otrzymać 4 punkty. Oba opisane błędy prowadzą do odpowiedzi

$$8 \cdot 15 + 100 = 220,$$

za którą zdający powinien otrzymać 3 punkty.

## Zadanie III (0–3)

Wykaż, że jeżeli $x>0$, to $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$.

**Rozwiązanie**

Omówimy 4 sposoby rozwiązania tego zadania.

**Sposób I** (pierwsza pochodna)

Definiujemy funkcję $f$ określoną wzorem $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ dla $x\in(0,+\infty)$.

Funkcja $f$ jest różniczkowalna, obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

Ponieważ $x^2+2x+4>0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$, to

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

Wynika stąd, że funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $(0,2\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\langle 2,+\infty)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczamy $f(2)=4+\frac{16}{2}=12$, stąd wynika, że $f(x)\geq 12$ co należało udowodnić.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Określenie funkcji $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ dla $x\in(0,+\infty)$ i obliczenie jej pochodnej

$$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie miejsca zerowego pochodnej i wyznaczenie przedziałów, w których pochodna ma „stały znak”:

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Stwierdzenie, że funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $(0,2\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\langle 2,+\infty)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczenie $f(2)=12$ i zapisanie wniosku: $f(x)\geq 12$, co należało udowodnić.

**Uwagi**

1. Zdający po obliczeniu, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$, może uzasadnić tezę korzystając z drugiej pochodnej funkcji $f$.
2. Jeżeli zdający obliczy, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$ i stąd już wywnioskuje fakt: $f(x)\geq f(2)=12$, to za rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

**Komentarz**

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który nie zmieni miejsc zerowych pochodnej i dalej doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać za całe zadanie maksymalnie **2 punkty**.

Przykłady tego typu błędów:

$$f'(x)=\frac{2x^3-16}{x},$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2+x+4)}{x^2},$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2+2x+2)}{x^2}.$$

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który zmienia miejsca zerowe pochodnej, to otrzymuje za zadanie **0 punktów**.

**Sposób II** (przekształcenia równoważne)

Zapisujemy nierówność $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ i przekształcamy ją równoważnie:

$$x^2-4x+4+\frac{16}{x}+4x-16\geq 0,$$

$$x^2-4x+4+\frac{4}{x}\left(x^2-4x+4\right)\geq 0,$$

$$(x-2)^2+\frac{4}{x}(x-2)^2\geq 0,$$

$$(x-2)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)\geq 0.$$

Jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, jako iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego, co należało udowodnić.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci $x^2-4x+4+\frac{16}{x}+4x-16\geq 0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2+\frac{4}{x}(x-2)^2\geq 0$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

- Zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)\geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego jest nieujemny, co kończy dowód

albo

- zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2+\frac{4}{x}(x-2)^2\geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, co kończy dowód.

**Sposób III** (funkcja wymierna)

Zapisujemy nierówność $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ w postaci równoważnej $\frac{x^3-12x+16}{x}\geq 0$.

Przy założeniu $x>0$, nierówność ta jest równoważna nierówności $x^3-12x+16\geq 0$ dla $x>0$

Określamy wielomian $W(x)=x^3-12x+16$.

Stwierdzamy, że jednym z miejsc zerowych wielomianu $W$ jest liczba $2$. Po podzieleniu wielomianu $W$ przez dwumian $x-2$ otrzymujemy iloraz $x^2+2x-8$, który zapisujemy w postaci iloczynowej $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$.

Stąd $W(x)=x^3-12x+16=(x-2)\left(x^2+2x-8\right)=(x-2)^2(x+4)$.

Stwierdzamy, że jeżeli $x>0$, to $W(x)\geq 0$ jako iloczyn czynników nieujemnych, co kończy dowód.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Stwierdzenie, że przy założeniu $x>0$, nierówność jest równoważna nierówności $x^3-12x+16\geq 0$ dla $x>0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Zapisanie wielomianu $W$ w postaci iloczynowej

$$W(x)=x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4).$$

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Uzasadnienie, że jeżeli $x>0$, to $W(x)\geq 0$, co kończy dowód.

**Sposób IV (**zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej)

Niektórzy zdający mogą odwołać się do tej nierówności, choć nie ma jej w podstawie programowej i, jak widzieliśmy, rozwiązanie zadania nie wymaga jej znajomości. Rozumowanie przebiega tak.

Lewą stronę nierówności zapisujemy w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

Przy założeniu $x>0$, korzystamy z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

$$\text{jeżeli } a>0,\ b>0,\ c>0, \text{ to } \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}, \text{ czyli } a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}.$$

Podstawiając

$$a=x^2,\quad b=\frac{8}{x},\quad c=\frac{8}{x},$$

otrzymujemy

$$x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=3\cdot\sqrt[3]{64}=12.$$

Stąd wynika, że $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$, co kończy dowód.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie lewej strony nierówności w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

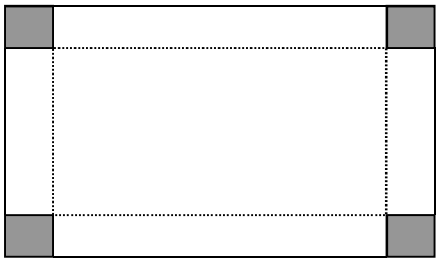
jeżeli $a>0,\ b>0,\ c>0$, to $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$, dla $a=x^2,\ b=\frac{8}{x},\ c=\frac{8}{x}$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zapisanie, że dla $x>0$, po zastosowaniu nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej otrzymujemy $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=12$, co kończy dowód.

## Zadanie IV (0–7)

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.



**Rozwiązanie**

Oznaczmy literą $x$ długość boku kwadratowych naroży. Podstawa pudełka ma wymiary

$$(80-2x)\times(50-2x).$$

Wysokość pudełka jest równa $x$. Zatem objętość wyraża się wzorem

$$V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x,$$

czyli

$$V=(4000-160x-100x+4x^2)\cdot x=4x^3-260x^2+4000x=4\left(x^3-65x^2+1000x\right)$$

dla $0<x<25$.

Rozważmy funkcję $f(x)=x^3-65x^2+1000x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

Obliczamy pochodną tej funkcji: $f'(x)=3x^2-130x+1000$.

Następnie znajdujemy miejsca zerowe tej pochodnej:

$$\Delta=130^2-12\cdot1000=16900-12000=4900,$$

$$x_1=\frac{130-70}{6}=10,\ x_2=\frac{130+70}{6}=33\frac{1}{3}.$$

Ponadto:

$f'(x)>0$ w każdym z przedziałów $(-\infty,10)$ oraz $\left(\frac{100}{3},+\infty\right)$,

$f'(x)<0$ w przedziale $\left(10,\frac{100}{3}\right)$.

Zatem funkcja $f$ jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty,10\rangle$ oraz $\left\langle\frac{100}{3},\infty\right)$ i malejąca w przedziale $\left\langle10,\frac{100}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $V(x)=4f(x)$ dla $x\in(0,25)$, więc w przedziale $(0,25)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=10$ funkcja $V$ przyjmuje wartość największą. Szukana objętość jest zatem równa $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18000\ \text{cm}^2$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wybór zmiennej i wyrażenie za pomocą tej zmiennej wielkości, które będą potrzebne do zdefiniowania funkcji. Oznaczenie literą $x$ długości boku kwadratowych naroży, zapisanie wymiarów podstawy pudełka $(80-2x)\times(50-2x)$,
- zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej, zapisanie objętości jako funkcji zmiennej wysokości pudełka $x$: $V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x$,
- określenie dziedziny funkcji $V$: $0<x<25$.

Zdający otrzymuje **2 punkty** za poprawne zdefiniowanie funkcji zmiennej $x$ opisującej objętość prostopadłościanu. Ponadto zdający otrzymuje **1 punkt** za poprawne określenie dziedziny wynikającej z treści zadania, a nie z wyznaczonego wzoru funkcji.

b) Drugi etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji $f$: $f'(x)=3x^2-130x+1000$,
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=10,\ x_2=33\frac{1}{3}$,
- uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja posiada wartość największą w punkcie $x=10$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap **(1 pkt)**.

Obliczenie największej objętości: $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18\,000\ \text{cm}^2$.

**Komentarz**

Zdający rozwiązując zadanie może nie doprowadzić rozumowania do końca lub popełnić różnego rodzaju błędy np.:

1. Błędne określenie dziedziny funkcji $V$ np. zapisanie $x>0$ lub $x<50$. Jeżeli zdający nie poda dziedziny funkcji lub poda ją błędnie, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **6 punktów**.
2. Błędne zapisanie wzoru na objętość pudełka (np. niewłaściwe określenie wymiarów pudełka lub wzoru na objętość prostopadłościanu).
3. Niewłaściwe wyznaczenie pochodnej rozważanej funkcji.
4. Nieprawidłowo obliczone miejsca zerowe pochodnej.

5. Błędne określenie monotoniczności funkcji oraz jej ekstremów.
6. Brak uzasadnienia, błędne lub niepełne uzasadnienie, że funkcja $V$ w punkcie $x=10$ przyjmuje maksimum lokalne.
7. Nieobliczenie lub błędne obliczenie największej objętości pudełka.

Schemat oceniania pokazuje jak w poszczególnych sytuacjach ocenić rozwiązanie zadania.

# 4. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym wraz z rozwiązaniami

## Zadanie 1. (0–1)

Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa

A. $3^3$ B. $3^{\frac{32}{9}}$ C. $3^4$ D. $3^5$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*1.4 Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.*

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\log 24$ jest równa

A. $2\log 2 + \log 20$ B. $\log 6 + 2\log 2$ C. $2\log 6 - \log 12$ D. $\log 30 - \log 6$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*1.6. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.*

**Rozwiązanie** B

## Zadanie 3. (0–1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$ jest liczba

A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{8}{3}$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.1. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności.*

**Rozwiązanie** D

## Zadanie 4. (0–1)

Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2+5x+6=0$ jest

A. $-6$ B. $-3$ C. $-2$ D. $-1$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.4. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.*

**Rozwiązanie** B

## Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 5$ jest

A. $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ B. $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{5},+\infty\right)$ C. $\left\langle\sqrt{5},+\infty\right)$ D. $\left\langle 5,+\infty\right)$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.5. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.*

**Rozwiązanie** B

## Zadanie 6. (0–1)

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(2-m)x+1$. Wynika stąd, że

A. $m=0$ B. $m=1$ C. $m=2$ D. $m=3$

**Wymagania ogólne**

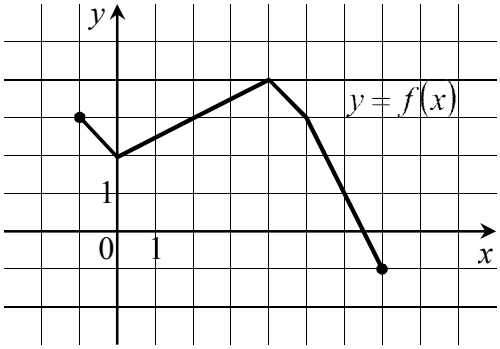
*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.7. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.*

**Rozwiązanie** D

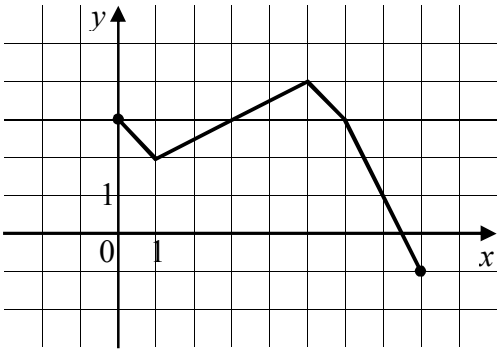
## Zadanie 7. (0—1)



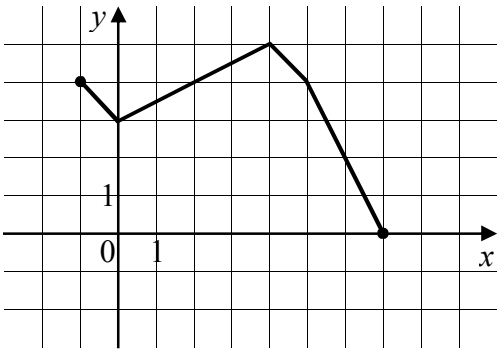

Rysunek powyżej przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x+1)$.

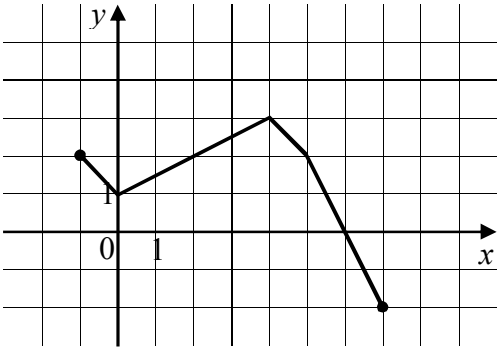
A.



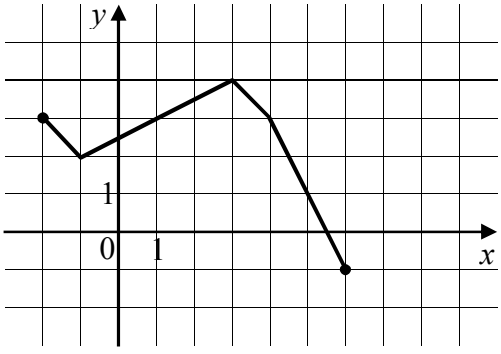

B.




C.




D.



**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.4. Zdający na podstawie wykresu funkcji y = f(x) szkicuje wykresy funkcji y = f(x + a), y = f(x) + a, y = –f(x), y = f(–x).*

**Rozwiązanie** D

## Zadanie 8. (0–1)

Wskaż równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 4x - 11$.

A. $x = -4$ B. $x = -2$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.10. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).*

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 9. (0–1)

Prosta o równaniu $y = a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x - 10$. Wynika stąd, że

A. $a = 3$ B. $a = 0$ C. $a = -1$ D. $a = -3$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.10. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).*

**Rozwiązanie** C

**Zadanie 10. (0–1)**

Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x - 3$ w przedziale $\langle 0,3 \rangle$?

A. $-7$ B. $-4$ C. $-3$ D. $-2$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.11. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.*

**Rozwiązanie** C

**Zadanie 11. (0–1)**

Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = 4x + 5$?

A. $y = -4x + 3$ B. $y = -\frac{1}{4}x + 3$ C. $y = \frac{1}{4}x + 3$ D. $y = 4x + 3$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*8.2. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.*

**Rozwiązanie** B

**Zadanie 12. (0–1)**

Punkty $A = (-1,3)$ i $C = (7,9)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta *ABCD*. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy

A. 10 B. $6\sqrt{2}$ C. 5 D. $3\sqrt{2}$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

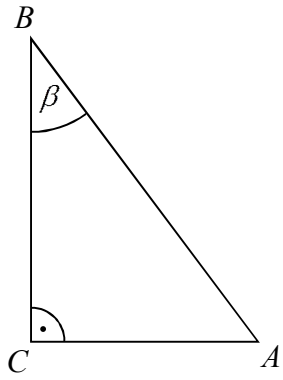
**Wymagania szczegółowe**

*8.6. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.*

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 13. (0–1)

Dane są długości boków $|BC|=5$ i $|AC|=3$ trójkąta prostokątnego $ABC$ o kącie ostrym $\beta$ (zobacz rysunek). Wtedy




A. $\sin\beta=\frac{3}{5}$ B. $\sin\beta=\frac{4}{5}$

C. $\sin\beta=\frac{3\sqrt{34}}{34}$ D. $\sin\beta=\frac{5\sqrt{34}}{34}$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*6.1. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.*

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 14. (0–1)

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Wówczas

A. $\cos\alpha<\frac{3}{4}$ B. $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ C. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{4}$ D. $\cos\alpha>\frac{\sqrt{13}}{4}$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*6.5. Zdający znając wartość jednej z funkcji sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.*

**Rozwiązanie** D

**Zadanie 15. (0–1)**

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt $\alpha$?

A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 60^\circ$ D. $\alpha > 60^\circ$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*6.2. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora).*

**Rozwiązanie** A

**Zadanie 16. (0–1)**

Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa $180^\circ$. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. $60^\circ$ B. $90^\circ$ C. $120^\circ$ D. $135^\circ$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*7.1. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.*

**Rozwiązanie** C

**Zadanie 17. (0–1)**

Ciąg $(a_n)$ jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$ B. $a_3 = -27$ C. $a_3 = 0$ D. $a_3 > 0$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.1. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.*

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 18. (0–1)

Liczby $x-1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba $x$ jest równa

A. 3 B. 1 C. $-1$ D. $-7$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.*

**Rozwiązanie** B

## Zadanie 19. (0–1)

Liczby $-8$, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba $x$ jest równa

A. $-3$ B. $-1{,}5$ C. 1 D. 15

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.4. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.*

**Rozwiązanie** A

## Zadanie 20. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest

A. 25 B. 24 C. 21 D. 20

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.*

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 21. (0–1)

Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa

A. 25 B. 20 C. 15 D. 12

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.*

**Rozwiązanie** B

## Zadanie 22. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x}=-\frac{1}{2}$.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.8. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np.* $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.

**Rozwiązanie**

Lewa strona równania jest określona dla $x\neq\frac{1}{2}$. Przenosimy wszystko na lewą stronę i sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$\frac{2-3x}{1-2x}+\frac{1}{2}=0, \qquad \frac{2(2-3x)+(1-2x)}{2(1-2x)}=0, \qquad \frac{5-8x}{2(1-2x)}=0.$$

Stąd otrzymujemy $5-8x=0$, czyli $x=\frac{5}{8}$. Dla tej wartości $x$ obie strony równania są określone, więc liczba $x=\frac{5}{8}$ jest szukanym rozwiązaniem równania.

## Zadanie 23. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \le 0$.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.5. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.*

**Rozwiązanie**

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego lub dostrzegając rozkład na czynniki $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$, otrzymujemy dwa pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. Ponieważ parabola o równaniu $y = x^2 + 6x - 7$ ma ramiona skierowane do góry, leży ona poniżej osi $Ox$ między swoimi miejscami zerowymi. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział domknięty $\langle -7, 1 \rangle$.

## Zadanie 24. (0–2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.11. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.*

**Rozwiązanie**

Wyznaczmy współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 1$. Mamy $x_w = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -8$. Ponieważ parabola ma ramiona skierowane do góry, to w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ dana funkcja maleje. Zatem maleje także na zawartym w nim przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Wobec tego najmniejszą wartość przyjmie ona w prawym końcu, czyli dla $x = 1$. Tą wartością jest $y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -4$.

## Zadanie 25. (0–2)

O funkcji liniowej $f$ wiadomo, że $f(1)=2$ oraz że do wykresu tej funkcji należy punkt $P=(-2,3)$. Wyznacz wzór funkcji $f$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*4.6. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.*

### Rozwiązanie

Funkcja $f$ jest liniowa, więc jej wzór możemy zapisać w postaci: $f(x)=ax+b$. Z warunku $f(1)=2$ wynika, że $2=a+b$. Skoro punkt $P$ należy do jej wykresu, to mamy także $3=f(-2)=-2a+b$. Rozwiązujemy otrzymany układ równań i otrzymujemy $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{7}{3}$. Zatem szukany wzór ma postać $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

## Zadanie 26. (0–2)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y=2x-11$ i przechodzącej przez punkt $P=(1,2)$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*8.3. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.*

### Rozwiązanie

Wszystkie proste równoległe do danej prostej mają taki sam współczynnik kierunkowy. Szukamy zatem prostej o równaniu postaci $y=2x+b$. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P=(1,2)$, otrzymujemy $2=2\cdot 1+b$, skąd $b=0$. Zatem prosta ta ma równanie $y=2x$.

## Zadanie 27. (0–2)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową *CD* trójkąta *ABC*, którego wierzchołkami są punkty: $A=(-2,-1)$, $B=(6,1)$, $C=(7,10)$.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

### Wymagania szczegółowe

*8.5.Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka.*

*8.1. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).*

### Rozwiązanie

Wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $C=(7,10)$ oraz przez punkt *D,* będący środkiem boku *AB*. Zatem korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy $D=\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=(2,0)$. Ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty otrzymujemy: $(y-10)(2-7)-(0-10)(x-7)=0$, a stąd $-5y+10x-20=0$, czyli $-y+2x-4=0$.

## Zadanie 28. (0–2)

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę $\alpha$. Oblicz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

### Wymagania szczegółowe

*6.1.Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.*

### Rozwiązanie

Niech $\alpha$ będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 2, zaś $\beta$ – kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 4. Zauważmy, że $\sin\alpha=\cos\beta$ oraz $\cos\alpha=\sin\beta$, więc mamy $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos\beta$, czyli szukana wartość nie zależy od wyboru kąta.

Przeciwprostokątna w danym trójkącie ma długość $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

## Zadanie 29. (0–2)

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*6.4. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:*
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *oraz* $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

### Rozwiązanie

Mamy $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, więc $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{15}$.

Zatem $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha = 3 + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$.

## Zadanie 30. (0–2)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg $(a_n)$ określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*5.1.Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.*

### Rozwiązanie

Szukamy liczb naturalnych $n \geq 1$ spełniających nierówność $n^2 - 2n - 24 < 0$.

Zapiszmy tę nierówność w postaci $n^2 - 2n + 1 - 25 < 0$, $(n-1)^2 - 5^2 < 0$, skąd $(n-1-5)(n-1+5) < 0$, $(n-6)(n+4) < 0$. Ponieważ $n + 4 > 0$, otrzymujemy $n < 6$. Zatem liczba *n* może przyjmować jedną z pięciu wartości: 1, 2, 3, 4, 5, czyli ciąg ma pięć wyrazów ujemnych.

## Zadanie 31. (0–2)

Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz $x$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.*

### Rozwiązanie

Mamy $a_1 = 2$ oraz $a_2 = x-3$, zatem różnica ciągu wynosi $r = (x-3)-2 = x-5$. Ponadto $8 = a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3(x-5)$, skąd $6 = 3(x-5)$ i w końcu $x = 7$.

## Zadanie 32. (0–2)

Wyrazami ciągu arytmetycznego $(a_n)$ są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz $a_{15}$.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

### Wymagania szczegółowe

*5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.*

### Rozwiązanie

Ponieważ dokładnie co piąta liczba naturalna daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to różnica danego ciągu arytmetycznego wynosi 5. Wobec tego $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$, skąd $a_1 = 2$. Wobec tego $a_{15} = a_1 + 14r = 2 + 14 \cdot 5 = 72$.

## Zadanie 33. (0–2)

Dany jest prostokąt o bokach *a* i *b*. Zmniejszamy długość boku *a* o 10% oraz zwiększamy długość boku *b* o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

### Wymagania ogólne

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

### Wymagania szczegółowe

*5.4. (gimnazjum) Zdający stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.*

### Rozwiązanie

Otrzymany prostokąt ma boki długości $0,9a$ oraz $1,2b$. Z porównania obwodów obu prostokątów otrzymujemy związek $2\cdot 0,9a+2\cdot 1,2b=2a+2b$, skąd $0,4b=0,2a$. Wobec tego $\frac{a}{b}=\frac{0,4}{0,2}=2$.

## Zadanie 34. (0–2)

Udowodnij, że jeśli *x*, *y* są liczbami rzeczywistymi, to $x^2+y^2\geq 2xy$.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.*

### Wymagania szczegółowe

*2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na* $(a\pm b)^2$ *oraz* $a^2-b^2$.

### Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb *x, y* mamy $(x-y)^2\geq 0$, skąd $x^2+y^2\geq 2xy$, co kończy dowód.

## Zadanie 35. (0–2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.*

**Rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są pary liczb całkowitych $(a,b)$, gdzie $1 \le a,b \le 6$ – mamy 36 takich par. Zdarzenia elementarne sprzyjające to pary $(1,5)$ oraz $(5,1)$. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

## Zadanie 36. (0–4)

W ciągu arytmetycznym $(a_n)$ dane są wyrazy: $a_3 = 4, a_6 = 19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(0, 200)$?

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.*

**Rozwiązanie**

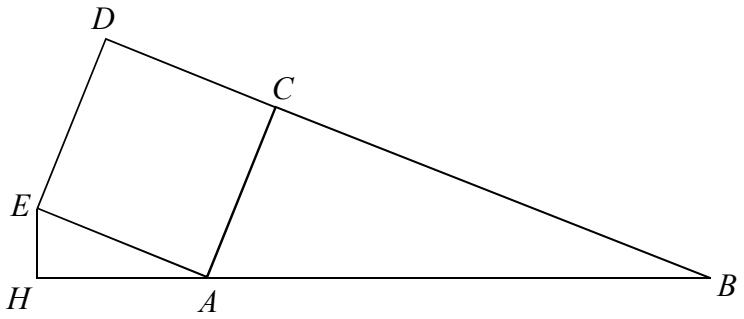
Mamy $4 = a_1 + 2r$, $19 = a_1 + 5r$. Stąd $3r = 15, r = 5$ oraz $a_1 = -6$. Pytamy, dla jakich $n$ mamy $0 < a_n < 200$, czyli $0 < -6 + (n-1)\cdot 5 < 200$.

Stąd $6 < 5(n-1) < 206$, $\frac{6}{5} < n-1 < \frac{206}{5}$, $\frac{11}{5} < n < \frac{211}{5}$.

Pierwszą nierówność spełniają liczby $n \ge 3$, a drugą liczby $n \le 42$. Zatem liczb naturalnych spełniających obydwa warunki mamy 40 i tyle też wyrazów ciągu leży w przedziale $(0,200)$.

## Zadanie 37. (0–4)

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 5$, $|BC| = 12$ zbudowano kwadrat *ACDE* (zobacz rysunek). Punkt *H* leży na prostej *AB* i kąt $|\sphericalangle EHA| = 90°$. Oblicz pole trójkąta *HAE*.




**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

**Wymagania szczegółowe**

*7.3. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.*

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że trójkąt prostokątny *EAH* jest podobny do trójkąta *ABC,* gdyż kąty *EAH* oraz *ABC* są przystające, jako kąty o ramionach równoległych. Oznaczymy przez *s* skalę podobieństwa trójkąta *EAH* do trójkąta *ABC*. Wtedy

$$P_{EAH} = s^2 P_{ABC} = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 s^2.$$

Pozostaje zatem obliczyć *s*.

Mamy

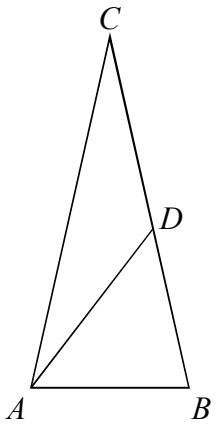
$$s = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{5}{13}$$

Zatem

$$P_{\Delta EAH} = 30 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{750}{169}.$$

## Zadanie 38. (0–4)

Punkt $D$ leży na boku $BC$ trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek $AD$ dzieli trójkąt $ABC$ na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ADC| = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$.



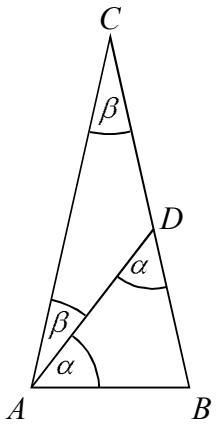

**Wymagania ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.17 (gimnazjum) Zdający rozpoznaje figury, które mają oś symetrii i figury, które mają środek symetrii. Wskazuje oś symetrii i środek symetrii figury.*

**Rozwiązanie I**




Niech $\alpha = |\sphericalangle BAD|$ i $\beta = |\sphericalangle ACD|$. Trójkąty $ABD$, $ACD$ i $ABC$ są równoramienne, więc

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BAD| = \alpha, \quad |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \beta$$

$$\text{oraz } |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha + \beta.$$

Suma miar kątów trójkąta $ACD$ jest równa $180°$, więc

$$|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\beta.$$

Z drugiej strony $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$, czyli $180° - 2\beta = 180° - \alpha$.

Stąd $\alpha = 2\beta$.

Suma miar kątów trójkąta $ABC$ jest równa $180°$, więc $2(\alpha + \beta) + \beta = 180°$, czyli $2(2\beta + \beta) + \beta = 180°$. Stąd $7\beta = 180°$.

Zatem $|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$. To kończy dowód.

**Rozwiązanie II**

Oznaczmy kąty $\alpha$ i $\beta$ jak w poprzednim rozwiązaniu.

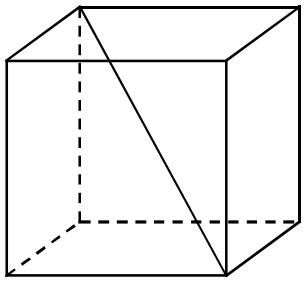
Ponieważ kąt $ADB$ jest kątem zewnętrznym trójkąta $ADC$, więc $\alpha = 2\beta$.

Również kąt $ADC$ jest kątem zewnętrznym trójkąta $ABD$, więc

$|\sphericalangle ADC| = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 4\beta + \beta = 5\beta = 5|\sphericalangle ACD|$, co kończy dowód.

## Zadanie 39. (0–2)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.



**Wymagania ogólne**

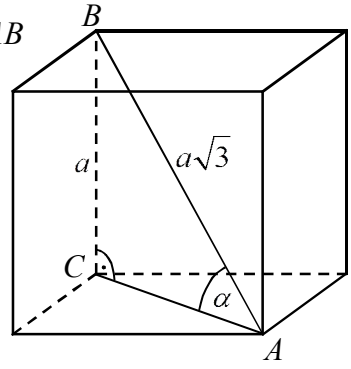
*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

**Wymagania szczegółowe**

*9.2. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.*

**Rozwiązanie**

Rozważmy trójkąt prostokątny $ABC$ utworzony przez przekątną $AB$ sześcianu, przekątną $AC$ podstawy sześcianu oraz krawędź $BC$, jak na rysunku. Kąt ostry $\alpha$ tego trójkąta jest kątem między przekątną sześcianu i płaszczyzną jego podstawy. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości $a$ jest równa $a\sqrt{3}$, więc sinus kąta $\alpha$ jest równy




$$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## Zadanie 40. (0–4)

W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości $d$ jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha$ takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

**Wymagania ogólne**

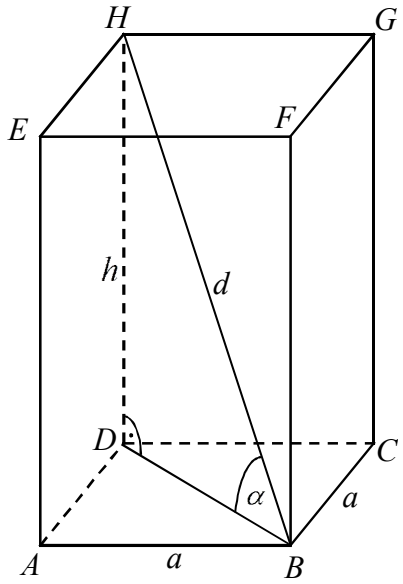
*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.*

**Rozwiązanie I**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Trójkąt *BDH* jest prostokątny, więc

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \text{ czyli } \frac{1}{5} = \frac{h}{d}. \text{ Stąd } h = \frac{1}{5}d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BDH* otrzymujemy

$$|BD|^2 = d^2 - h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{5}d\right)^2 = \frac{24}{25}d^2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|BD|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}d^2 = \frac{12}{25}d^2.$$

Zatem objętość tego graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABCD}\cdot h = \frac{12}{25}d^2\cdot\frac{1}{5}d = \frac{12}{125}d^3.$$

**Rozwiązanie II**

Przyjmijmy oznaczenia jak w rozwiązaniu I.

Trójkąt *BDH* jest prostokątny, więc $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, czyli $h = d\sin\alpha$. Stąd $h = 0,2\,d$.

W trójkącie *BDH* mamy również $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, czyli $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0,2)^2} = \sqrt{0,96}\,d$.

Stąd $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0,96d^2\cdot 0,2\,d = 0,096d^3$.

## Zadanie 41. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.*

**Rozwiązanie**

Mamy do dyspozycji 5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Musimy jednak pamiętać, że 0 nie może być pierwszą cyfrą zapisu dziesiętnego liczby. Dlatego rozważymy dwa przypadki: a) gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz b) gdy pierwsza cyfra jest parzysta.

W przypadku a) pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów; każda pozostała cyfra musi być parzysta i każdą z nich też możemy wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku a) mamy $5^4$ możliwości.

W przypadku b) cyfrę parzystą, stojącą na pierwszym miejscu, możemy wybrać na 4 sposoby. Na pozostałych miejscach mamy rozmieścić jedną cyfrę nieparzystą oraz dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej możemy wybrać na 3 sposoby; na pozostałych dwóch miejscach umieścimy cyfry parzyste. Cyfrę na każdym z tych trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku b) mamy $4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 12 \cdot 5^3$ możliwości.

W obu przypadkach łącznie otrzymujemy $5^4 + 12 \cdot 5^3 = (5+12) \cdot 5^3 = 17 \cdot 125 = 2125$ liczb spełniających warunki zadania.

## Zadanie 42. (0–4)

Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.*

**Rozwiązanie I** (model klasyczny)

Oznaczmy przez $w_1$, $w_2$ losy wygrywające, a przez $p_1$, $p_2$, $p_3$ losy puste. Wszystkie wyniki losowania dwóch losów bez zwracania możemy przedstawić w tabeli: wynik pierwszego losowania wyznacza wiersz, a wynik drugiego losowania – kolumnę, w przecięciu których leży pole, odpowiadające tej parze losowań. Pola położone na przekątnej odrzucamy, gdyż odpowiadałyby one wylosowaniu dwukrotnie tego samego losu, a to jest niemożliwe, gdyż losujemy bez zwracania.

Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu $A$ zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

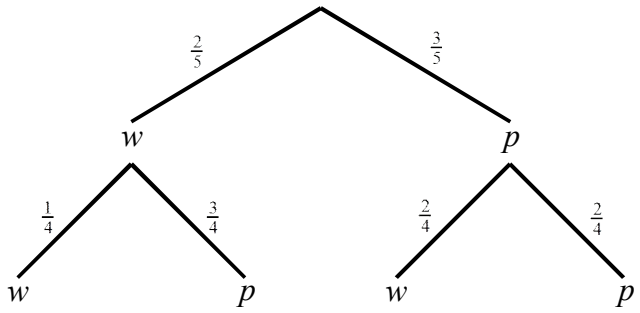
| | $w_1$ | $w_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | | x | x | x | x |
| $w_2$ | x | | x | x | x |
| $p_1$ | x | x | | | |
| $p_2$ | x | x | | | |
| $p_3$ | x | x | | | |

Mamy więc 20 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 20$, oraz 14 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, czyli $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

**Rozwiązanie II** (metoda drzewa)

Losowanie z pojemnika kolejno dwóch losów bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie $w$ oznacza wylosowanie losu wygrywającego, a $p$ – losu pustego. Pogrubione gałęzie drzewa odpowiadają zdarzeniu $A$ polegającemu na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Na odcinkach drzewa zostały zapisane odpowiednie prawdopodobieństwa.




Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2+6+6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

## Zadanie 43. (0–3)

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.*

### Wymagania szczegółowe

*2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na* $(a \pm b)^2$ *oraz* $a^2 - b^2$.

### Rozwiązanie I

Dla dowodu przekształcimy w sposób równoważny tezę.

Ponieważ obie strony danej nierówności $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$ są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu. Otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}\right)^2<\left(2^{26}\right)^2$$

$$2^{50}+1+2\cdot\sqrt{2^{50}+1}\cdot\sqrt{2^{50}-1}+2^{50}-1<2^{52}$$

$$2\cdot 2^{50}+2\sqrt{\left(2^{50}-1\right)\left(2^{50}+1\right)}<2^{52}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1}<2^{52}-2^{51}$$

$$\sqrt{2^{100}-1}<2^{50}.$$

Obie strony tej nierówności są także dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy

$$2^{100}-1<2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a zatem dana w zadaniu nierówność jest również prawdziwa, co kończy dowód.

### Rozwiązanie II

Oznaczmy $a=\sqrt{2^{50}+1}$, $b=\sqrt{2^{50}-1}$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb *a, b*, takich, że $a\neq b$, mamy $\left(a-b\right)^2>0$, skąd $a^2+b^2>2ab$. Wobec tego

$\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(2^{50}+1+2^{50}-1\right)=2^{52}.$

Stąd $a+b<\sqrt{2^{52}}=2^{26}$, co kończy dowód.

## Zadanie 44. (0–5)

W roku 2015 na uroczystości urodzinowej ktoś spytał jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma ten jubilat.

### Wymagania ogólne

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

### Wymagania szczegółowe

*3.4. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.*

### Rozwiązanie

Oznaczmy przez $x$ obecny wiek jubilata (w latach). Wówczas wiek jubilata sprzed 27 lat jest równy $x-27$, wiek, jaki będzie miał za 15 lat, jest równy $x+15$, a rok jego urodzenia to $2015-x$.

Mamy więc równanie $(x-27)(x+15)=2015-x$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy $x^2-11x-2420=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby $x=55$, $x=-44$.

Stąd wiemy, że jubilat w roku 2015 obchodzi 55. urodziny.

# 5. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie rozszerzonym wraz z rozwiązaniami

## Zadanie 1. (0–1)

Funkcja określona wzorem $f(x)=|x-3|-4$ dla wszystkich liczb rzeczywistych

A. nie ma miejsc zerowych.
B. ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
C. ma dokładnie dwa miejsca zerowe.
D. ma więcej niż dwa miejsca zerowe.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.9.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż* $||x+1|-2|=3$, $|x+3|+|x-5|>12$.

**Rozwiązanie** C

## Zadanie 2. (0–3)

Niech $m=\log_{21}7$. Wykaż, że $\log_7 27=\frac{3(1-m)}{m}$.

**Wymagania ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

**Wymagania szczegółowe**

*1.6. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.*

*1.2.R Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.*

**Rozwiązanie (I sposób)**

Zauważmy, że $\log_7 21 = \dfrac{1}{\log_{21} 7} = \dfrac{1}{m}$.

Zatem

$$\log_7 27 = \log_7 3^3 = 3\log_7 3 = 3\log_7\left(\frac{21}{7}\right) = 3\left(\log_7 21 - \log_7 7\right) = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3\cdot\frac{1-m}{m}.$$

To kończy dowód.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Zauważamy, że

$$\frac{3(1-m)}{m} = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3\left(\log_7 21 - 1\right) = 3\left(\log_7 21 - \log_7 7\right) = 3\log_7 \frac{21}{7} = \log_7 3^3 = \log_7 27,$$

co kończy dowód.

## Zadanie 3. (0–2)

Oblicz najmniejszą liczbę naturalną *n* spełniającą nierówność $\left|\dfrac{2n-10}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{30}$.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*2.6.R Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.*

*3.8.R Zdający rozwiązuje proste nierówności wymierne typu* $\dfrac{x+1}{x+3} > 2$, $\dfrac{x+3}{x^2-16} < \dfrac{2x}{x^2-4x}$, $\dfrac{3x-2}{4x-7} \le \dfrac{1-3x}{5-4x}$.

**Rozwiązanie**

Rozwiązujemy nierówność $\left|\dfrac{2n-10}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{30}$. Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$\left|\frac{3(2n-10) - 2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{30},$$

$$\left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{30},$$

$$\frac{32}{3(3n+1)} < \frac{1}{30},$$

$$3n+1 > 320,$$

$$n > 106\frac{1}{3}.$$

W powyższych przekształceniach dwukrotnie skorzystaliśmy z tego, że $3(3n+1) > 0$. Zatem najmniejszą liczbą naturalną spełniającą podaną nierówność jest $n = 107$.

## Zadanie 4. (0–2)

Równanie $x^2 + 48x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania $x_1, x_2$. Liczba $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

### Wymagania szczegółowe

*3.1.R Zdający stosuje wzory Viète'a.*

### Rozwiązanie

Korzystając ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1 + x_2 = -48$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 2$.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(-48)^2 - 2 \cdot 2}{2^2} = 575.$$

Należy zakodować cyfry 5, 7, 5.

## Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6px + 9$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Oblicz $p$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.4.R Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian* $x-a$.

**Rozwiązanie**

$W(x)$ jest podzielny przez $x-1$, zatem $W(1)=0$. $W(1)=7-6p$. Stąd $p=1{,}166\ldots$.

Należy zakodować cyfry 1, 6, 6.

**Uwaga**

Należy zakodować cyfry **otrzymanego** wyniku, a nie wyniku przybliżonego, zatem cyfry 1, 6, 6, a nie 1, 6, 7.

## Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej *k* liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

**Wymagania ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

**Wymagania szczegółowe**

*2.7. (szkoła podstawowa) Zdający rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 5.*

**Rozwiązanie**

Iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l$ ($l$ jest liczbą całkowitą), to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+1$, to czynnik $(k+9)=5l+10=5(l+2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+2$, to czynnik $(k^2+1)=25l^2+20l+4+1=5(5l^2+4l+1)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+3$, to czynnik $(k^2+1)=25l^2+30l+9+1=5(5l^2+6+2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+4$, to czynnik $(k+1)=5l+4+1=5(l+1)$ jest podzielny przez 5.

## Zadanie 7. (0–2)

Udowodnij, że jeśli $a>0$ i $b>0$ oraz $a+b=1$, to $ab\le\frac{1}{4}$.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

### Wymagania szczegółowe

*2.1. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na* $(a\pm b)^2$ *oraz* $a^2-b^2$.

### Rozwiązanie (I sposób)

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2},$$

czyli

$$ab\le\frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

### Rozwiązanie (II sposób)

Z założenia mamy $b=1-a$. Przekształcamy nierówność $ab\le\frac{1}{4}$ w sposób równoważny

$$a(1-a)\le\frac{1}{4},$$

$$a^2-a+\frac{1}{4}\ge 0,$$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.

### Rozwiązanie (III sposób)

Oznaczmy: $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}-x$. Wówczas

$$ab=\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{4}-x^2\le\frac{1}{4},$$

co kończy dowód.

## Zadanie 8. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których funkcja $f$ określona wzorem

$$f(x)=\left(m^2-1\right)x^2-2(1-m)x+2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

### Wymagania szczegółowe

*3.2.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.*

### Rozwiązanie

Funkcja $f(x)=\left(m^2-1\right)x^2-2(1-m)x+2$ w zależności od parametru *m* jest liniowa lub kwadratowa. Rozważmy dwa przypadki:

1. Gdy $m^2-1=0$, to funkcja $f$ jest liniowa.
    1. Dla $m=-1$ funkcja ma wzór $f(x)=-4x+2$, więc $m=-1$ nie spełnia warunków zadania.
    2. Dla $m=1$ funkcja ma wzór $f(x)=2$, więc $m=1$ spełnia warunki zadania.
2. Gdy $m^2-1\neq 0$, to funkcja *f* jest kwadratowa. Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej *x*, gdy parabola będąca jej wykresem leży w całości nad osią *Ox*. Funkcja $f(x)=\left(m^2-1\right)x^2-2(1-m)x+2$ ma tę własność, kiedy zachodzą warunki:
    1. $m^2-1>0$,
    2. $\Delta<0$.

    Pierwszy warunek jest spełniony dla $m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

    Warunek $\Delta<0$ jest spełniony, gdy

$$4(1-m)^2-8\left(m^2-1\right)<0,$$
$$(m-1)^2-2(m-1)(m+1)<0,$$
$$(m-1)(m-1-2m-2)<0,$$
$$(m-1)(-m-3)<0,$$
$$-(m-1)(m+3)<0,$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

Zatem funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Uwzględniając oba przypadki, otrzymujemy $m \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, +\infty)$.

## Zadanie 9. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{-5x}{x+3}$ jest równa

A. $-\infty$ B. $0$ C. $6$ D. $+\infty$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*11.1.R Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.*

**Rozwiązanie** A

## Zadanie 10. (0–2)

Oblicz $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-2n^3 + 3n}{(1-4n)^3}$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.2.R Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu* $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$ *oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.*

**Rozwiązanie**

Obliczamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(-2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(\dfrac{1}{n}-4\right)^3}=\dfrac{1}{32}=0,03125$.

Ponieważ $\dfrac{1}{32}=0,03125$, więc należy zakodować cyfry: 0, 3, 1.

## Zadanie 11. (0–2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $(a_n)$ o wyrazach dodatnich taki, że $a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.3.R Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.*

**Rozwiązanie**

Pierwszy wyraz i trzeci wyraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$. Ponieważ $a_3=a_1\cdot q^2$, stąd $q^2=\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{4}{9}$. Zatem $q=-\dfrac{2}{3}$ lub $q=\dfrac{2}{3}$. Wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q=\dfrac{2}{3}$. Ponieważ $|q|=\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$, więc

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{4}.$$

Suma $S$ wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $(a_n)$ o wyrazach dodatnich jest równa: $S=\dfrac{9}{4}$.

## Zadanie 12 (0–2)

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\frac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych *x*, takich że $x\neq-\sqrt{6}$ i $x\neq\sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

### Wymagania szczegółowe

*11.2.R Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych.*

### Rozwiązanie

Obliczamy pochodną:

$$f'(x)=\frac{\left(2x^4+15\right)'\left(6-x^2\right)-\left(2x^4+15\right)\left(6-x^2\right)'}{\left(6-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{8x^3\left(6-x^2\right)+2x\left(2x^4+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2}=\frac{2x\left(-2x^4+24x^2+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2},$$

$$f'(1)=\frac{2\left(-2+24+15\right)}{(5)^2}=\frac{2\cdot37}{25}=\frac{74}{25}=2,96.$$

Należy zakodować cyfry: 2, 9, 6.

## Zadanie 13. (0–3)

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta *l* o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji *f*.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

### Wymagania szczegółowe

*11.3.R Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.*

**Rozwiązanie**

Zapisujemy równanie prostej $l$ w postaci kierunkowej $y = 10x + 9$.

Wyznaczamy pochodną funkcji $f$: $f'(x) = 12x^2 - 2$.

Zauważamy, że dla $x = -1$ oraz dla $x = 1$ pochodna funkcji $f$ ma wartość $10$ i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej $l$.

Obliczamy wartość funkcji $f$ w punkcie $x = -1$: $f(-1) = -1$ oraz w punkcie $x = 1$: $f(1) = 3$.

Punkt o współrzędnych $(-1, -1)$ leży na prostej $l$, natomiast punkt o współrzędnych $(1, 3)$ nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji $f$, co kończy dowód.

## Zadanie 14. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

**Wymagania ogólne**

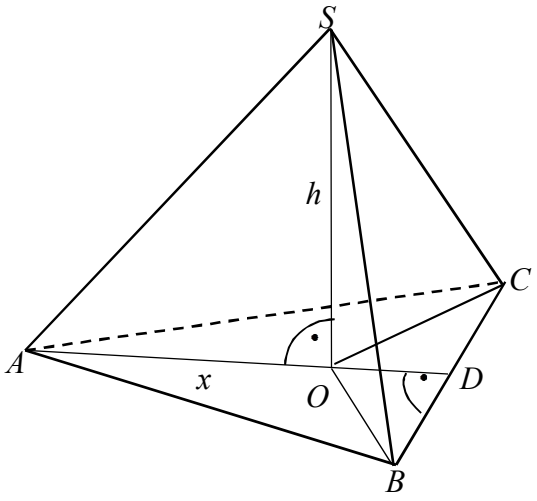
*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.*

**Wymagania szczegółowe**

*11.6.R Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.*

**Rozwiązanie**

Niech $x = |AO| = |BO| = |CO|$ (zobacz rysunek) oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz $h = |SO|$ oznacza wysokość tego ostrosłupa. Wówczas $x + h = 24$.



Wysokość $AD$ w trójkącie $ABC$ jest równa $|AD|=\frac{|AB|\cdot\sqrt{3}}{2}$. Zatem promień $x$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ (podstawie ostrosłupa) jest równy: $x=\frac{2}{3}\cdot\frac{|AB|\sqrt{3}}{2}=\frac{|AB|\sqrt{3}}{3}$, stąd $|AB|=x\sqrt{3}$. Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa: $P=\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$.

Ponadto z równości $x+h=24$ otrzymujemy $h=24-x$, gdzie $0<x<24$.

Zatem objętość tego ostrosłupa jest określona wzorem: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}\cdot(24-x)$, czyli $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3+24x^2\right)$.

Należy obliczyć, dla jakiego $x$ spełniającego nierówność $0<x<24$ funkcja $V$ określona wzorem $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3+24x^2\right)$ przyjmuje wartość największą.

Rozważamy funkcję $f(x)=-x^3+24x^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji $f$: $f'(x)=-3x^2+48x$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=16$, $x_2=0$. Ponadto:

- $f'(x)<0$ w każdym z przedziałów $(-\infty,0)$ oraz $(16,+\infty)$,
- $f'(x)>0$ w przedziale $(0,16)$.

Zatem funkcja $f$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty,0\rangle$ oraz $\langle 16,+\infty)$ i rosnąca w przedziale $\langle 0,16\rangle$.

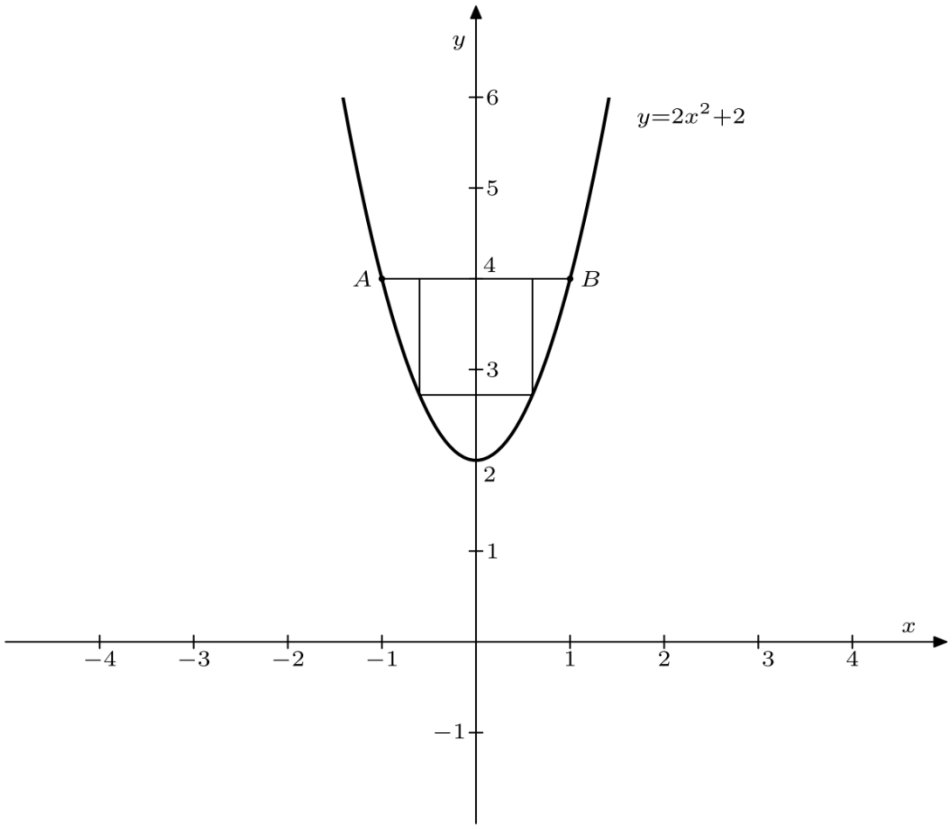
Ponieważ $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}f(x)$ dla $x\in(0,24)$, więc w przedziale $x\in(0,24)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=16$ funkcja $V$ przyjmuje wartość największą.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-16^3+24\cdot16^2\right)=512\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest największa i równa $V=512\sqrt{3}$, gdy promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $16$.

## Zadanie 15. (0–7)

Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku $AB$, gdzie $A=(-1,4)$ i $B=(1,4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y=2x^2+2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.




### Wymagania ogólne

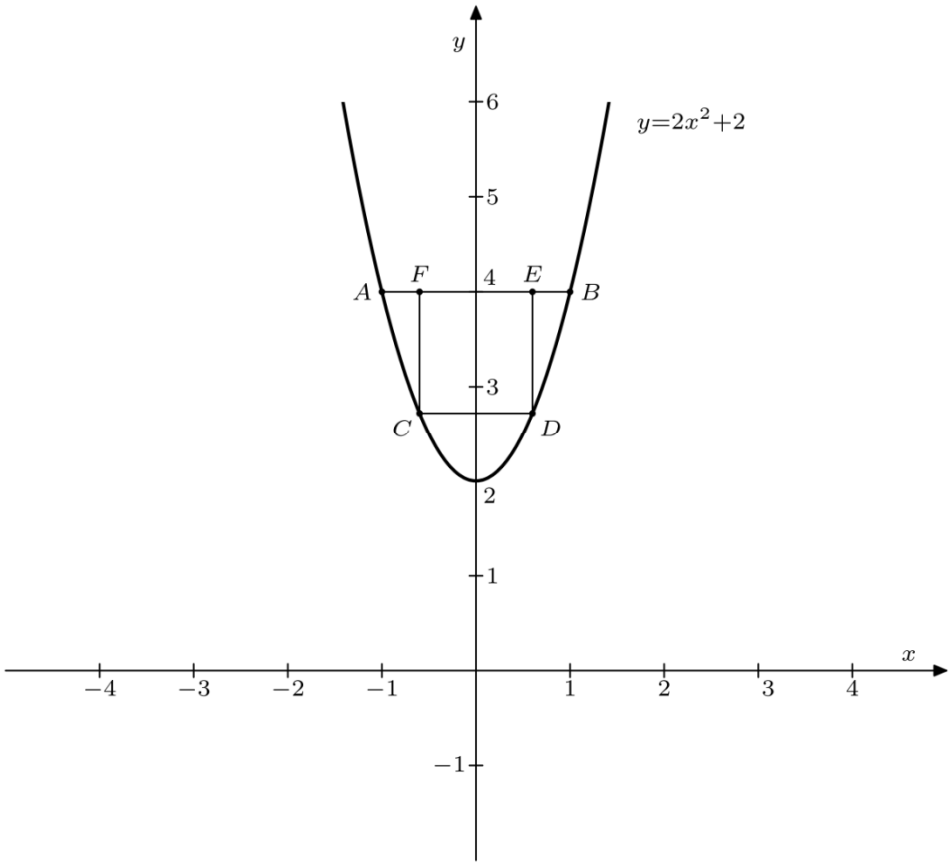
*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.*

### Wymagania szczegółowe

*11.6.R Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.*

### Rozwiązanie

Niech punkty $C$ i $D$ leżą na paraboli $y=2x^2+2$, a punkty $E$ i $F$ leżą na odcinku $AB$ (zob. rysunek). Oznaczmy przez $x$ odległość punktu $D$ od osi $Oy$.




Wówczas punkt $D$ ma współrzędne $D=\left(x,2x^2+2\right)$, punkt $C$ ma współrzędne $C=\left(-x,2x^2+2\right)$. Punkty $E$ i $F$ leżą na prostej o równaniu $y=4$, zatem ich współrzędne są równe: $E=\left(x,4\right)$ i $F=\left(-x,4\right)$.

Wyznaczamy długości boków *CD* i *DE* prostokąta *CDEF*:

$\left|CD\right|=2x$ oraz $\left|DE\right|=2-2x^2$ dla $0<x<1$.

Zatem pole prostokąta *CDEF* jest określone wzorem: $P\left(x\right)=2x\cdot\left(2-2x^2\right)$, czyli

$P\left(x\right)=-4x^3+4x$ dla $0<x<1$.

Rozważamy funkcję $f\left(x\right)=-4x^3+4x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji $f$: $f'\left(x\right)=-12x^2+4$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ponadto:

- $f'\left(x\right)<0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$,
- $f'\left(x\right)>0$ w przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Zatem funkcja *f* jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x)=f(x)$ dla $x\in(0,1)$, więc w przedziale $x\in(0,1)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja *P* przyjmuje wartość największą.

Obliczamy wymiary prostokąta: $|CD|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|DE|=2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$.

Największe pole ma prostokąt o wymiarach $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4}{3}$. Jest ono równe $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

## Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

### Wymagania ogólne

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.*

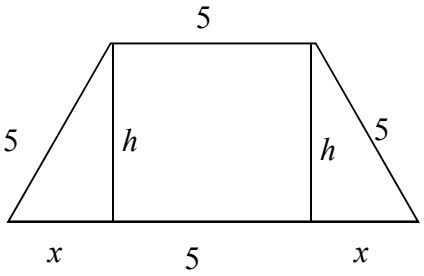
### Wymagania szczegółowe

*11.6.R Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.*

### Rozwiązanie

Niech $2x+5$ oznacza długość dłuższej podstawy, a *h* wysokość trapezu. Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P=\frac{2\cdot 5+2x}{2}\cdot h=(5+x)\cdot h \text{ i } 0<x<5.$$




Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność $x^2+h^2=5^2$, stąd $h=\sqrt{25-x^2}$.

Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P(x)=(5+x)\cdot\sqrt{25-x^2}=\sqrt{(5+x)^2\cdot(25-x^2)}=$$
$$=\sqrt{(5+x)^3\cdot(5-x)}=\sqrt{-x^4-10x^3+250x+625},$$

gdzie $0<x<5$.

Należy obliczyć, dla jakiego $x$ spełniającego nierówność $0<x<5$ funkcja $P$ określona wzorem $P(x)=\sqrt{-x^4-10x^3+250x+625}$ przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa ($y=\sqrt{t}$) jest rosnąca, więc wystarczy zbadać funkcję $f(x)=-x^4-10x^3+250x+625$. Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$f'(x)=-4x^3-30x^2+250.$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=-5$, $x_2=\frac{5}{2}$.

Ponadto:

- $f'(x)<0$ w każdym z przedziałów $(-\infty,-5)$ oraz $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$,
- $f'(x)>0$ w przedziale $\left(-5,\frac{5}{2}\right)$.

Zatem funkcja *f* jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty,-5\rangle$ oraz $\left\langle\frac{5}{2},+\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-5,\frac{5}{2}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x)=\sqrt{f(x)}$ dla $x\in(0,5)$, więc w przedziale $x\in(0,5)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=\frac{5}{2}$ funkcja *P* przyjmuje wartość największą.

Zauważmy wreszcie, że jeżeli $x=\frac{5}{2}$, to $2x+5=10$. Zatem dłuższa podstawa ma długość 10.

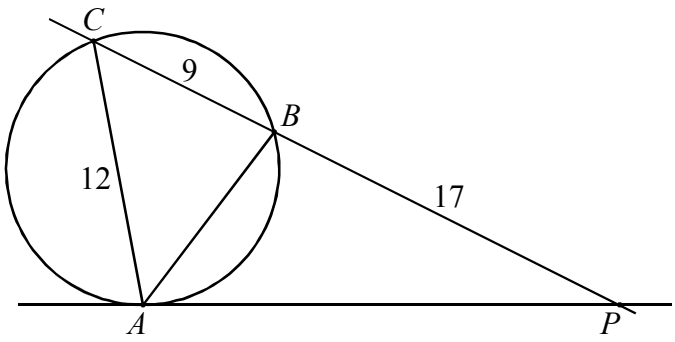
Obliczamy największe pole trapezu dla $x=\frac{5}{2}$:

$$P(x)=\left(5+\frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{75}{4}\sqrt{3}.$$

Największe pole ma trapez, którego dłuższa podstawa ma długość 10. Pole tego trapezu jest równe $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

## Zadanie 17. (0–3)

Dany jest trójkąt $ABC$ i prosta $k$ styczna w punkcie $A$ do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta $BC$ przecina prostą $k$ w punkcie $P$. Długości odcinków $AC$, $BC$ i $PB$ zostały podane na rysunku.




Oblicz długość odcinka $AB$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

### Wymagania szczegółowe

*7.4.R Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.*

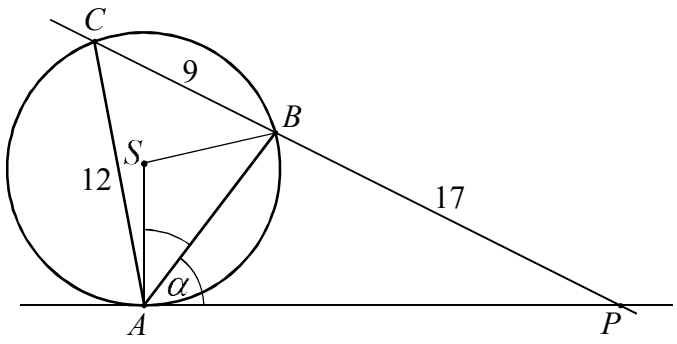
### Rozwiązanie (I sposób)

Niech $S$ oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ i niech $\alpha = \left|\sphericalangle PAB\right|$. Kąt $PAS$ jest prosty, więc $\left|\sphericalangle BAS\right| = 90^\circ - \alpha$. Trójkąt $ABS$ jest równoramienny, zatem

$$\left|\sphericalangle ASB\right| = 180^\circ - 2\cdot\left|\sphericalangle BAS\right| = 180^\circ - 2\cdot\left(90^\circ - \alpha\right) = 2\alpha .$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że

$$\left|\sphericalangle ACB\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\sphericalangle ASB\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha .$$




Oznaczmy $|AB| = x$ oraz $|PA| = y$.

Trójkąty *APB* i *CPA* są podobne, gdyż $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCA|$ i kąt przy wierzchołku *P* jest wspólnym kątem tych trójkątów. Zatem

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26} = \frac{17}{y},$$

$$y^2 = 17 \cdot 26.$$

Stąd $y = \sqrt{17 \cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów *APB* i *CPA* otrzymujemy też

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|PC|},$$

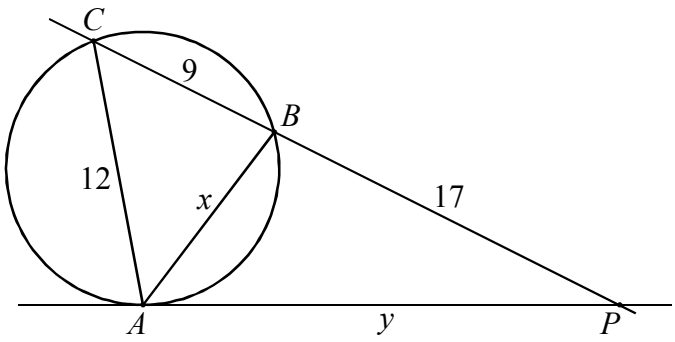
$$\frac{x}{y} = \frac{12}{26}.$$

Zatem $x = \frac{12y}{26} = \frac{12\sqrt{17 \cdot 26}}{26} = \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = 9,7032...$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że kąty *PAB* i *ACB* są równe. Ponadto kąt przy wierzchołku *P* jest wspólnym kątem trójkątów *APB* i *CPA*. Zatem te trójkąty są podobne.




Stąd

$$\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26}=\frac{17}{y},$$

$$y^2=17\cdot 26.$$

Zatem $y=\sqrt{17\cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów *APB* i *CPA* otrzymujemy też

$$\frac{|AB|}{|PA|}=\frac{|CA|}{|PC|},$$

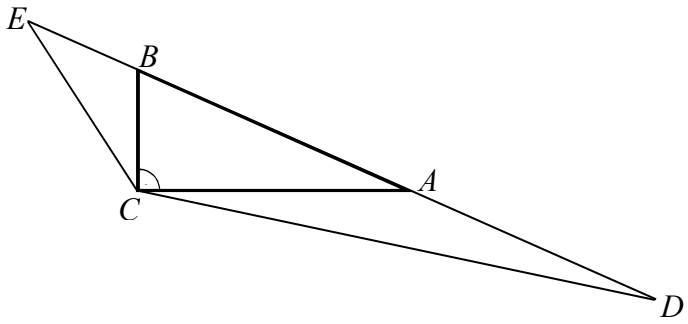
$$\frac{x}{y}=\frac{12}{26}.$$

Stąd $x=\frac{12y}{26}=\frac{12\sqrt{17\cdot 26}}{26}=\frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=9,7032...$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

## Zadanie 18. (0–6)

Dany jest trójkąt prostokątny $ABC$ o kącie prostym przy wierzchołku $C$ i obwodzie równym $2p$. Na prostej $AB$ obrano punkty $D$ i $E$ leżące na zewnątrz odcinka $AB$ takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).




Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie $ECD$ jest równy $p\sqrt{2}$.

### Wymagania ogólne

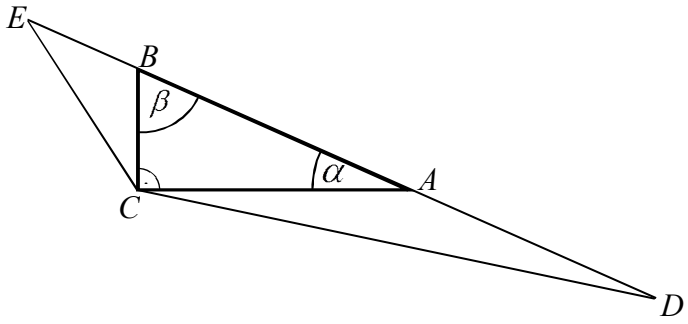
*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

### Wymagania szczegółowe

*7.5.R Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.*

### Rozwiązanie

Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ (zobacz rysunek).




Kąty $CAD$ i $CBE$ to kąty przyległe odpowiednio do kątów $BAC$ i $ABC$ trójkąta $ABC$, więc

$$|\sphericalangle CAD| = 180^\circ - \alpha \text{ oraz } |\sphericalangle CBE| = 180^\circ - \beta.$$

Trójkąty $CAD$ i $CBE$ są równoramienne, więc

$$|\sphericalangle DCA| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} \text{ oraz } |\sphericalangle ECB| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem miara kąta *ECD* jest równa

$$\left|\sphericalangle ECD\right| = \left|\sphericalangle DCA\right| + 90^\circ + \left|\sphericalangle ECB\right| = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Stąd

$$\left|\sphericalangle ECD\right| = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 135^\circ.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta *ECD* wynika, że

$$\frac{|ED|}{\sin \sphericalangle ECD} = 2R,$$

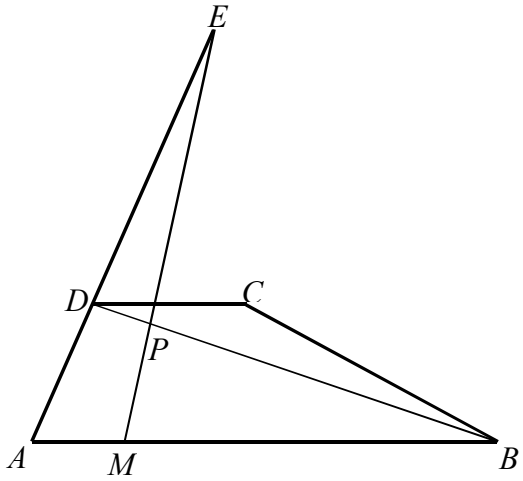
gdzie *R* to promień okręgu opisanego na trójkącie *ECD*. Ponieważ $|ED| = a + b + c = 2p$ i $\sin \sphericalangle ECD = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc

$$2R = \frac{2p}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Stąd $R = p\sqrt{2}$, co kończy dowód.

## Zadanie 19. (0–3)

Ramię *AD* trapezu *ABCD* (w którym $AB \| CD$) przedłużono do punktu *E* takiego, że $|AE| = 3 \cdot |AD|$. Punkt *M* leży na podstawie *AB* oraz $|MB| = 4 \cdot |AM|$. Odcinek *ME* przecina przekątną *BD* w punkcie *P* (zobacz rysunek).




Udowodnij, że $|BP| = 6 \cdot |PD|$.

**Wymagania ogólne**

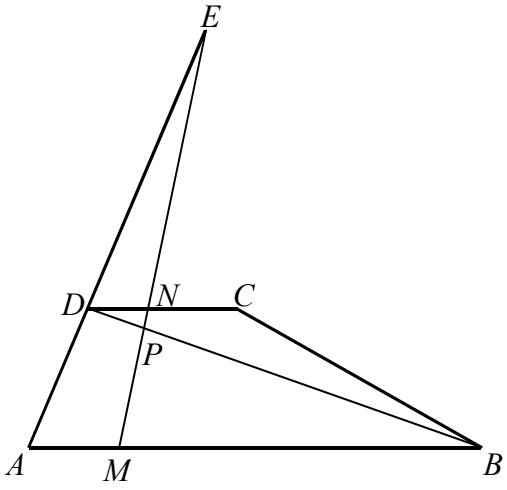
*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

**Wymagania szczegółowe**

*7.3. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.*

**Rozwiązanie**

Niech $N$ oznacza punkt przecięcia odcinka $EM$ z prostą $DC$.




Trójkąt $AME$ jest podobny do trójkąta $DNE$ (kąty $MAE$ i $NDE$ są równe oraz kąty $AME$ i $DNE$ są równe, gdyż proste $AB$ i $DC$ są równoległe). Stąd

$$\frac{|AM|}{|AE|}=\frac{|DN|}{|DE|},$$

ale $|AE|=3\cdot|AD|$, więc $|DN|=\frac{2}{3}\cdot|AM|$.

Trójkąt $MBP$ jest podobny do trójkąta $NDP$ (kąty $MBP$ i $NDP$ są równe oraz kąty $BMP$ i $DNP$, gdyż proste $AB$ i $DC$ są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|BM|}=\frac{|DP|}{|DN|},$$

ale $|BM|=4\cdot|AM|$, więc $|BP|=\frac{4\cdot|AM|\cdot|DP|}{|DN|}=\frac{4\cdot|AM|}{\frac{2}{3}|AM|}\cdot|DP|=6\cdot|DP|$.

To kończy dowód.

## Zadanie 20. (0–4)

Okrąg jest styczny do osi *Ox* w punkcie $A=(2,0)$. Punkt $B=(-1,9)$ leży na tym okręgu. Wyznacz równanie tego okręgu.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*8.5.R Zdający posługuje się równaniem okręgu* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *oraz opisuje koła za pomocą nierówności.*

**Rozwiązanie**

Niech $S=(a,b)$ będzie środkiem szukanego okręgu. Ponieważ okrąg ten jest styczny do osi *Ox* w punkcie $A=(2,0)$, więc $S=(2,b)$. Z definicji okręgu wynika, że $|AS|=|BS|$, czyli

$$(2-2)^2+(b-0)^2=(2+1)^2+(b-9)^2.$$

Stąd

$$b^2=9+b^2-18b+81,$$
$$b=5.$$

Zatem $S=(2,5)$, a równanie okręgu ma postać $(x-2)^2+(y-5)^2=25$.

## Zadanie 21. (0–5)

Okrąg o środku $S=(3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*8.5.R Zdający posługuje się równaniem okręgu* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *oraz opisuje koła za pomocą nierówności.*

**Rozwiązanie**

Środkiem okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ jest punkt $S_1=(6,8)$, a promień tego okręgu jest równy 10. Środki $S$ i $S_1$ okręgów leżą na prostej o równaniu $y=2x-4$.

Szukana styczna jest prostopadła do tej prostej, więc ma równanie postaci $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Odległość środka $S_1=(6,8)$ od stycznej jest równa 10, zatem

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 6+8-b\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=10,$$

$$\left|11-b\right|=10\cdot\sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$\left|11-b\right|=5\sqrt{5}.$$

Stąd $11-b=5\sqrt{5}$ lub $11-b=-5\sqrt{5}$, czyli $b=11-5\sqrt{5}$ lub $b=11+5\sqrt{5}$. Otrzymujemy więc dwie proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ oraz $y=-\frac{1}{2}x+11+5\sqrt{5}$.

Odległość środka $S$ od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ jest równa

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 3+2+11-5\sqrt{5}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{29}{5}\sqrt{5}-10.$$

Ponieważ $\frac{29}{5}\sqrt{5}-10<10$, więc ta prosta jest szukaną styczną.

## Zadanie 22. (0–1)

Równanie $\sin^2 x=\sin x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$

A. ma dokładnie 1 rozwiązanie.
B. ma dokładnie 2 rozwiązania.
C. ma dokładnie 3 rozwiązania.
D. nie ma rozwiązań.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*6.6.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu* $\sin 2x = \frac{1}{2}$,

$\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

**Rozwiązanie**

Przekształcamy równanie $\sin^2 x = \sin x$ do postaci $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$, zatem $\sin x = 0$ lub $\sin x = 1$. Rozwiązaniami równania $\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ jest $x = 0$ oraz $x = \pi$, a rozwiązaniem równania $\sin x = 1$ jest $x = \frac{\pi}{2}$. Stąd równanie $\sin^2 x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ ma dokładnie 3 rozwiązania.

Zdający powinien zaznaczyć odpowiedź C.

## Zadanie 23. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*6.5.R Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.*

*6.6.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu* $\sin 2x = \frac{1}{2}$,

$\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

**Rozwiązanie**

Przekształcamy równanie, korzystając ze wzoru na sumę sinusów: $2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$.

Stąd $\cos 2x \cdot (2\sin 3x - 1) = 0$. Zatem $\cos 2x = 0$ lub $2\sin 3x - 1 = 0$.

Rozwiązaniami równania $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$ są liczby: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą, lub $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą, lub $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą.

## Zadanie 24. (0–3)

Wykaż, że dla każdego kąta $\alpha$ prawdziwa jest równość: $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1+3\cos^2 2\alpha$.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

### Wymagania szczegółowe

*2.1.R Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na* $\left(a\pm b\right)^3$ *oraz* $a^3\pm b^3$.

*6.4. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:*
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *oraz* $\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$.

### Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości

$$a^6+b^6=\left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2\right),$$

przekształcamy wyrażenie $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)$ i otrzymujemy:

$$4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$
$$=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

Przekształcamy teraz prawą stronę równości, korzystając ze wzoru na cosinus kąta podwojonego.

$$1+3\cos^2 2\alpha=1+3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2=1+3\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$
$$=1+3\left(1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=4-12\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

To kończy dowód.

## Zadanie 25. (0–2)

Rozwiąż nierówność $\cos 5x>\dfrac{1}{2}$ dla $-\pi\le x\le\pi$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*6.4.R Zdający posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu* $\sin x > a$, $\cos x \le a$, $\operatorname{tg} x > a$*).*

**Rozwiązanie**

Rozwiązujemy nierówność $\cos 5x > \frac{1}{2}$.

Zatem $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 5x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą, czyli

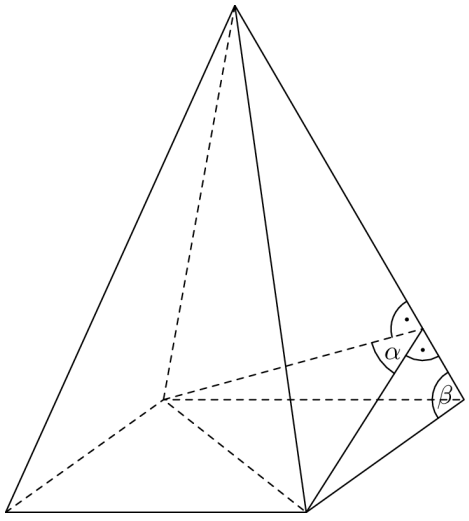
$-\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} < x < \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$, gdzie *k* jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami tej nierówności dla $-\pi \le x \le \pi$ są:

$-\frac{13\pi}{15} < x < -\frac{11\pi}{15}$ lub $-\frac{7\pi}{15} < x < -\frac{5\pi}{15}$ lub $-\frac{\pi}{15} < x < \frac{\pi}{15}$ lub $\frac{5\pi}{15} < x < \frac{7\pi}{15}$ lub $\frac{11\pi}{15} < x < \frac{13\pi}{15}$.

## Zadanie 26. (0–3)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt $\alpha$ jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt $\beta$ jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa) – zobacz rysunek.
Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = -1$.




**Wymaganie ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

**Wymagania szczegółowe**

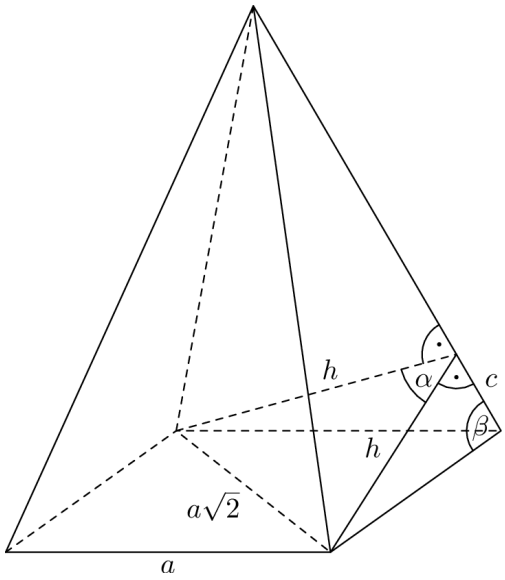
*9.4. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami.*

*9.1. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów.*

*9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.*

**Rozwiązanie**

Oznaczmy, tak jak na poniższym rysunku: $a$ – długość krawędzi podstawy, $h$ – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, $c$ – długość odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości $h$.




Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos\alpha .$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2}.$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy

$$c^2 = a^2 - h^2 .$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{c}, \text{ a stąd wynika, że } \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2}{c^2}.$$

Obliczamy zatem

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2 - a^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{-\left(a^2 - h^2\right)}{c^2} = \frac{-c^2}{c^2} = -1.$$

To kończy dowód.

## Zadanie 27. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $a$. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha$. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

**Wymaganie ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

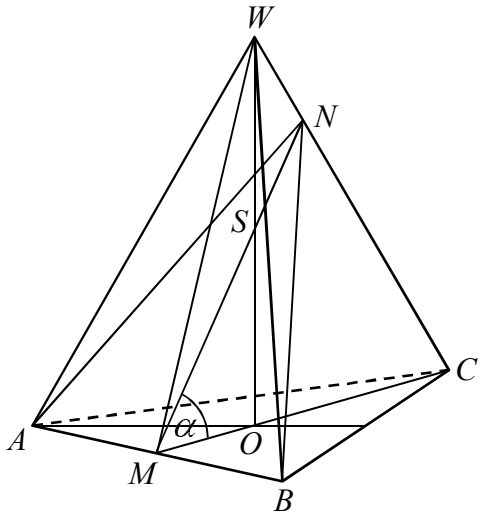
*9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.*

*9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.*

*10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.*

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy oznaczenia takie jak na rysunku.




W trójkącie równobocznym $ABC$ mamy:

$$|AB| = a, \quad |CM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |OM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Stąd

$$|OS| = |OM| \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } |OW| = 2 \cdot |OS| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Zatem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{12} \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Następnie

$$|MW|^2 = |OM|^2 + |OW|^2 = \frac{3a^2}{36} + \frac{3a^2}{9}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12}\left(1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha\right),$$

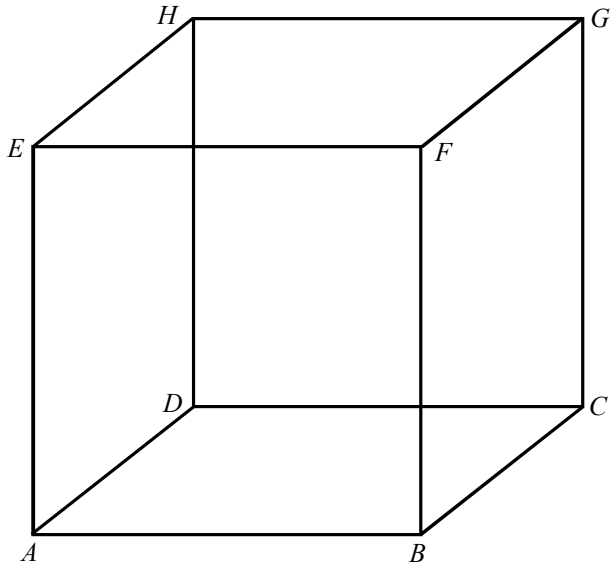
$$|MW| = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}$$

i stąd otrzymujemy

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} .$$

## Zadanie 28. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej $1$. Punkt $S$ jest środkiem krawędzi $DH$. Odcinek $DW$ jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka $D$ na ścianę $ACS$. Oblicz długości odcinków *AW*, *CW* i *SW*.




**Wymaganie ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

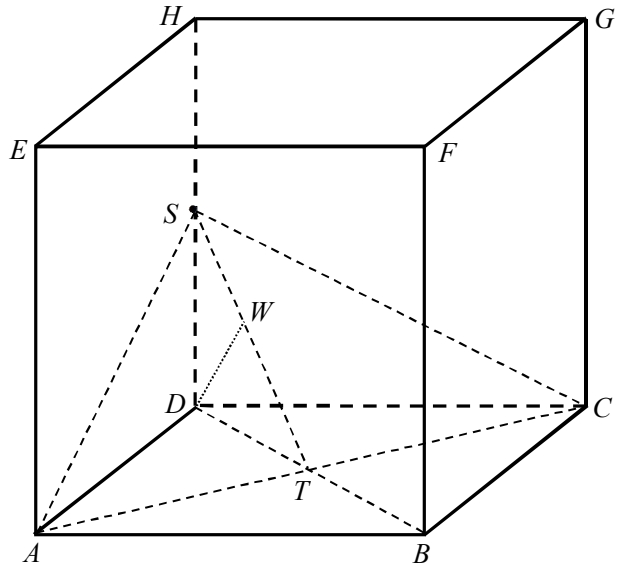
**Wymagania szczegółowe**

*9.2. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.*

*10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.*

**Rozwiązanie**

Łączymy punkty $A$ i $S$, $A$ i $C$ oraz $C$ i $S$ (zobacz rysunek). Niech $T$ oznacza punkt przecięcia przekątnych $AC$ i $BD$ podstawy tego sześcianu.




Punkt $S$ leży na krawędzi $DH$, więc $AS=CS$, a zatem trójkąt $ACS$, stanowiący podstawę ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek $ST$ jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka $ST$ obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego $TSD$:

$$|ST|^2=|SD|^2+|DT|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ czyli } |ST|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważamy, że odcinek $DW$ jest wysokością trójkąta prostokątnego $TDS$ poprowadzoną do przeciwprostokątnej $TS$. Długość odcinka $DW$ obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta $TDS$:

$$\frac{1}{2}\cdot|SD|\cdot|TD|=\frac{1}{2}\cdot|ST|\cdot|DW|,$$

$$|DW|=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego $SWD$ wynika, że:

$$|SW| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Teraz zauważamy, że wysokość $ST$ trójkąta równoramiennego $ACS$ jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW = CW$. Długość odcinka $AW$ obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego $ATW$, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymujemy zatem

$$|AW|^2 = |AT|^2 + |TW|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{6},$$

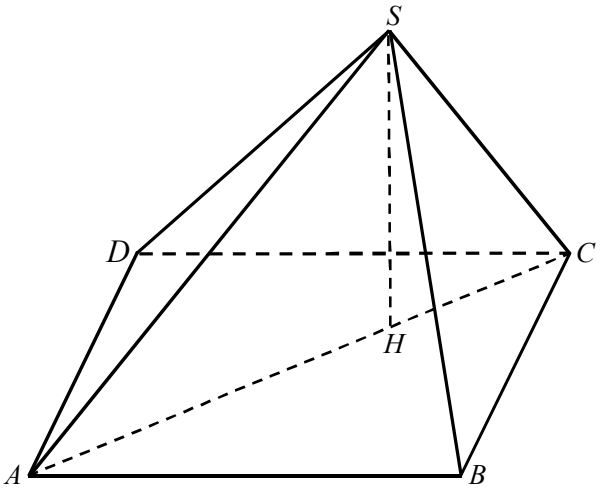
skąd

$$|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $|SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

## Zadanie 29. (0–6)

Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek $HS$ jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt $H$ dzieli przekątną $AC$ podstawy w stosunku $2:1$ (zobacz rysunek). Krawędzie boczne $BS$ i $DS$ mają długość równą 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi $AS$ i $CS$.




**Wymaganie ogólne**

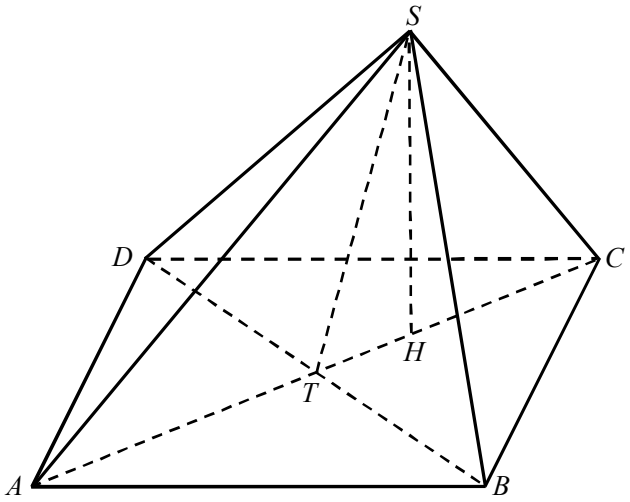
*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.*

**Rozwiązanie**

Niech $T$ oznacza punkt przecięcia przekątnych $AC$ i $BD$ podstawy ostrosłupa (zobacz rysunek).




Ponieważ $|AC|=\sqrt{2}$, więc $|CH|=\frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $|HT|=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$. Trójkąt $BSD$ jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, dlatego że jego ramiona mają długości $|BS|=|DS|=1$, a podstawa $|BD|=\sqrt{2}$. Stąd wynika, że $|ST|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Obliczamy zatem wysokość $HS$ tego ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta $SHT$:

$$|HS|^2=|ST|^2-|HT|^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9},\ \text{skąd wynika, że}\ |HS|=\frac{2}{3}.$$

Objętość $V$ tego ostrosłupa jest zatem równa:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

Pozostaje obliczyć jeszcze długości krawędzi bocznych $AS$ i $CS$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dwukrotnie, najpierw do trójkąta $AHS$, otrzymujemy

$$|AS|^2=|AH|^2+|HS|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3},\ \text{więc}\ |AS|=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

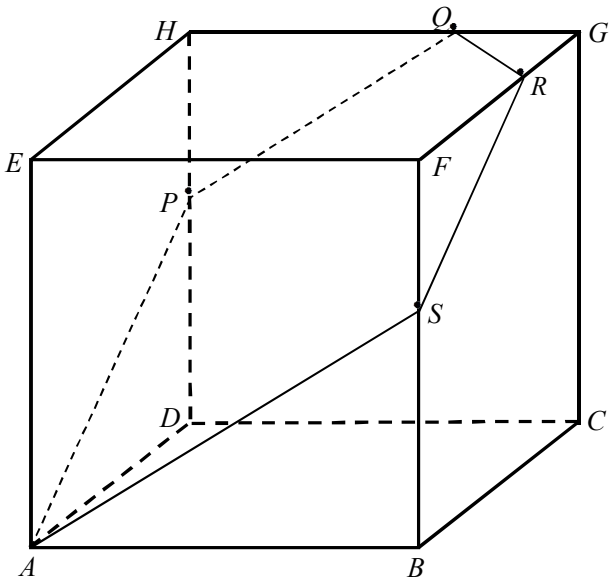
natomiast do trójkąta $CHS$

$$|CS|^2=|CH|^2+|HS|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3},\ \text{skąd}\ |CS|=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**Uwaga**
Rozważany ostrosłup nie jest prawidłowy, a wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

## Zadanie 30. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość $15$. Punkty $Q$ i $R$ dzielą krawędzie $HG$ i $FG$ w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ|=|FR|=10$. Płaszczyzna $AQR$ przecina krawędzie $DH$ i $BF$ odpowiednio w punktach $P$ i $S$. Oblicz długości odcinków $DP$ i $BS$.




**Wymaganie ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

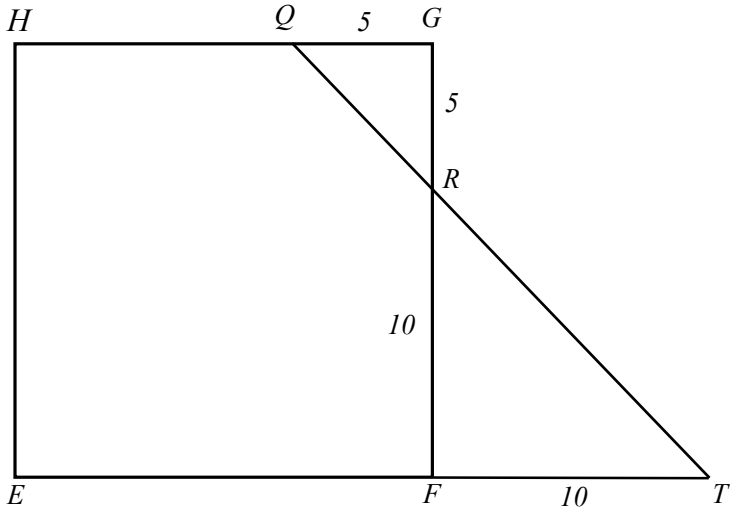
*9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.*

*9.1. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), oblicza miary tych kątów.*

*7.4.R Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.*

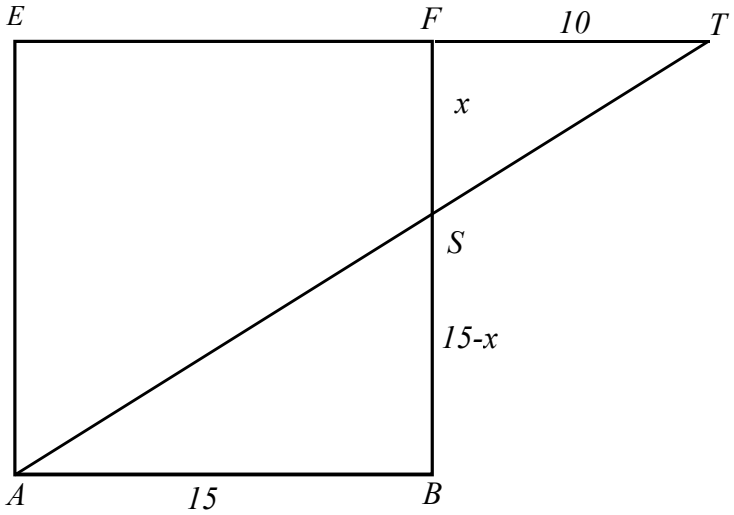
**Rozwiązanie (I sposób)**

Rozważamy kwadrat $EFGH$. Niech $T$ oznacza punkt przecięcia przedłużeń odcinków $QR$ i $EF$ (zobacz rysunek).




Trójkąty prostokątne $RFT$ i $RGQ$ są podobne na mocy cechy *kkk*. Stąd wynika, że $|FT|=10$.

Teraz rozważamy kwadrat $ABFE$ (zobacz rysunek).




Trójkąty prostokątne $ABS$ i $TFS$ są podobne na mocy cechy *kkk*. Możemy więc zapisać równanie

$$\frac{|SF|}{|FT|}=\frac{|BS|}{|AB|}, \text{ a zatem } \frac{x}{10}=\frac{15-x}{15}.$$

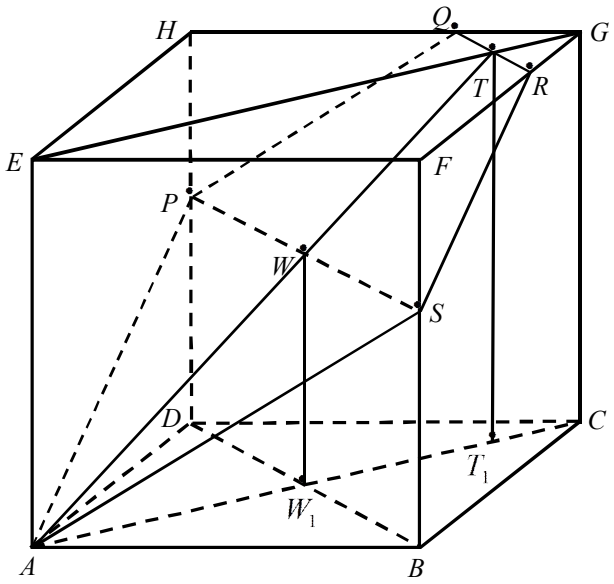
Rozwiązujemy to równanie

$$15x=150-10x,\ \ x=6.$$

Zatem długość szukanego odcinka $BS$ jest równa $9$. Ponieważ punkty $B$ i $D$ leżą symetrycznie względem płaszczyzny $ACGE$, więc $|DP|=|BS|=9$.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Rysujemy przekątne $AC$, $BD$, $EG$ oraz łączymy punkty $P$ i $S$. Oznaczmy kolejno: $W$ – środek odcinka $PS$, $W_1$ – punkt przecięcia przekątnych $AC$ i $BD$, $T$ – środek odcinka $QR$ (zobacz rysunek). Niech ponadto $T_1$ będzie takim punktem przekątnej $AC$, że $GT = CT_1$.




Zauważamy, że $DP = BS$ co wynika, z symetrii względem płaszczyzny $ACGE$. Zatem czworokąt $BSPD$ jest prostokątem. Stąd wynika, że prosta przechodząca przez środki boków tego prostokąta – punkty $W$ i $W_1$ – jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Ponadto, prosta przechodząca przez punkty $T$ i $T_1$ jest także prostopadła do tej płaszczyzny. Zauważamy, że punkty: $A$, $W$, $W_1$, $T$ i $T_1$ leżą w jednej płaszczyźnie — jest nią płaszczyzna $ACGE$. Na mocy cechy *kkk*, trójkąty prostokątne $AW_1W$ i $AT_1T$ są podobne, więc możemy zapisać równość

$$\frac{|TT_1|}{|AT_1|} = \frac{|WW_1|}{|AW_1|}, \text{ skąd wynika, że } |WW_1| = \frac{|TT_1| \cdot |AW_1|}{|AT_1|}.$$

Ponieważ $|TT_1| = 15$, $|AW_1| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ oraz $|AT_1| = 15\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$, więc

$$|WW_1| = \frac{15 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2}}{\frac{25\sqrt{2}}{2}} = 9.$$

Oczywiście $|DP| = |BS| = |WW_1| = 9$.

## Zadanie 31. (0–3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.

- Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$. Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

  Mamy zatem

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 5!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=3\cdot 7=21.$$

- Możemy po prostu wszystkie te sposoby wyboru dwóch miejsc wypisać (kółko białe oznacza miejsce dla cyfry nieparzystej, kółko czarne — dla parzystej):

1: ● ● ○ ○ ○ ○ ○
2: ● ○ ● ○ ○ ○ ○
3: ● ○ ○ ● ○ ○ ○
4: ● ○ ○ ○ ● ○ ○
5: ● ○ ○ ○ ○ ● ○
6: ● ○ ○ ○ ○ ○ ●
7: ○ ● ● ○ ○ ○ ○
8: ○ ● ○ ● ○ ○ ○
9: ○ ● ○ ○ ● ○ ○
10: ○ ● ○ ○ ○ ● ○
11: ○ ● ○ ○ ○ ○ ●
12: ○ ○ ● ● ○ ○ ○
13: ○ ○ ● ○ ● ○ ○
14: ○ ○ ● ○ ○ ● ○
15: ○ ○ ● ○ ○ ○ ●
16: ○ ○ ○ ● ● ○ ○
17: ○ ○ ○ ● ○ ● ○
18: ○ ○ ○ ● ○ ○ ●
19: ○ ○ ○ ○ ● ● ○
20: ○ ○ ○ ○ ● ○ ●
21: ○ ○ ○ ○ ○ ● ●

- Możemy także te możliwości zliczać: jeśli pierwsza (licząc od lewej strony) cyfra parzysta stoi na pierwszym miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (od drugiego do siódmego); jeśli pierwsza (od lewej strony) cyfra parzysta stoi na drugim miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z pięciu miejsc i tak dalej. Wreszcie, jeśli pierwsza cyfra parzysta stoi na szóstym miejscu, to druga może stać tylko na miejscu siódmym. Łącznie mamy więc

$$6+5+4+3+2+1=21$$

  sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych.

- Możemy wreszcie rozumować następująco: jedną cyfrę parzystą możemy ustawić na jednym z 7 miejsc, drugą na jednym z sześciu miejsc. W ten sposób każde ustawienie policzyliśmy dwukrotnie, np. ustawienie

○ ○ ● ○ ● ○ ○

możemy otrzymać wybierając najpierw miejsce trzecie, a potem miejsce piąte lub wybierając najpierw miejsce piąte, a potem miejsce trzecie. Zatem liczba sposobów wyboru tych dwóch miejsc jest równa

$$\frac{7\cdot 6}{2}=7\cdot 3=21.$$

W kroku drugim obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwukrotnie z reguły mnożenia. Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie występuje zero, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: 2, 4, 6, 8. Mamy zatem $4^2=16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Mamy zatem $5^5=3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostałych miejscach.

W kroku trzecim obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy

$$21\cdot 4^2\cdot 5^5=21\cdot 16\cdot 3125=1\,050\,000$$

liczb.

## Zadanie 32. (0–4)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najprostszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:

$$111+112+113+121+122+123+131+132+133=1098,$$

$$211+212+213+221+222+223+231+232+233=1998,$$

$$311+312+313+321+322+323+331+332+333=2898.$$

Suma wszystkich liczb jest równa

$$1098 + 1998 + 2898 = 5994 .$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9 \cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 900 + 198 = 1098 ,$$

$$9 \cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 1800 + 198 = 1998 ,$$

$$9 \cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 2700 + 198 = 2898 .$$

Dodawanie

$$11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33 = 198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Ta obserwacja będzie podstawą dla drugiego sposobu rozwiązania.

Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100. Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dadzą sumę

$$9 \cdot 100 + 9 \cdot 200 + 9 \cdot 300 = 9 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 100 \cdot 6 = 5400 .$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dadzą sumę

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + 9 \cdot 30 = 9 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 10 \cdot 6 = 540 .$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 9 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 6 = 54 .$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem

$$5400 + 540 + 54 = 5994 .$$

## Zadanie 33. (0–7)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Mamy więc pięć, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24:

1. Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{3}=280$ — wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki

   albo tak:

   - $\binom{8}{4}\cdot 4=280$ — wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{3!\cdot 4!}=280$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.
2. Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24=3\cdot 4\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7\cdot 6=336$ — wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa

   albo tak:

   - $\binom{8}{3}\cdot 3!=336$ — wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{5!}=336$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111.

3. Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek $(24 = 3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$.
   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8 \cdot 7 = 56$ — wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2} \cdot 2 = 56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!} = 56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111.

4. Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek $(24 = 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$.

   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8 \cdot 7 = 56$ — wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2} \cdot 2 = 56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!} = 56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111.

5. Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek$(24 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$.
   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8 \cdot \binom{7}{2} = 168$ — wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek

   albo tak:
   - $\binom{8}{3} \cdot 3 = 168$ — wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{2! \cdot 5!} = 168$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111.

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest

$$280 + 336 + 56 + 56 + 168 = 896.$$

## Zadanie 34. (0–6)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Wszystkie liczby stucyfrowe o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5 możemy podzielić na 4 grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu liczby:

1. Liczba $5000...000$, w której po cyfrze $5$ następuje $99$ zer. Jest jedna taka liczba.

2. Liczby postaci $3000...1...000...1...000$, w których po cyfrze $3$ występuje $97$ cyfr $0$ i dwie cyfry $1$, stojące na dwóch miejscach wybranych z $99$ możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{2}=\frac{99\cdot 98}{2}=99\cdot 49=4851$ takich liczb.

3. Liczby postaci $1000...3...000...1...000$ lub $1000...1...000...3...000$, w których po cyfrze $1$ występuje $97$ cyfr $0$ oraz cyfry $1$ i $3$ (w dowolnej kolejności), stojące na dwóch miejscach wybranych z $99$ możliwych miejsc. Jest $99\cdot 98=9702$ takich liczb.

4. Liczby postaci $1000...1...000...1...000...1...000...1...000$, w których po cyfrze $1$ występuje $95$ cyfr $0$ i cztery cyfry $1$, stojące na czterech miejscach wybranych z $99$ możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{4}=\frac{99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{24}=33\cdot 49\cdot 97\cdot 24=3\,764\,376$ takich liczb.

Zatem wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5, jest

$$1+4851+9702+3\,764\,376=3\,778\,930.$$

## Zadanie 35. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2.R Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.*

**Rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia:

$A$ — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8,
$B$ — suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Mamy obliczyć $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu $B$ sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej,
$|B| = 7 \cdot 6 = 42$,

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej,
$|A \cap B| = 1 \cdot 7 = 7$,

stąd

$P(A \mid B) = \dfrac{7}{42} = \dfrac{1}{6}$.

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\dfrac{1}{6}$.

## Zadanie 36. (0–3)

Niech $A, B$ będą zdarzeniami losowymi zawartymi w $\Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A \mid B) \geq 0,625$.

$P(A \mid B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2.R Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.*

**Rozwiązanie**

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Wykażemy najpierw, że jeżeli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A \cap B) \geq 0,5$.

Wiemy, że $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ oraz $P(A \cup B) \leq 1$.

Mamy więc: $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, stąd $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$,

czyli $P(A \cap B) \geq 0,5$.

Stąd $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \dfrac{0,5}{0,8} = 0,625$.

## Zadanie 37. (0–4)

Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i gdy otrzymamy liczbę $n$, to rzucamy $n$ razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.3.R Zdający korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.*

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:
$B_1$ – wylosujemy liczbę 1,
$B_2$ – wylosujemy liczbę 2,
$B_3$ – wylosujemy liczbę 3,
$A$ – otrzymamy co najmniej jednego orła.

Zdarzenia $B_1$, $B_2$ i $B_3$ spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega,\ B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B_3 = B_2 \cap B_3 = \varnothing,\ P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} > 0.$$

Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym do zdarzenia $A$, otrzymujemy

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3).$$

Ponieważ $P(A \mid B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid B_2) = \frac{3}{4}$, $P(A \mid B_3) = \frac{7}{8}$, więc

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{17}{24}.$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe $\frac{17}{24}$.

**Uwaga**

Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą drzewa.

## Zadanie 38. (0–2)

Niech $A, B$ będą zdarzeniami losowymi zawartymi w $\Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.

$B'$ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $B$.

**Wymagania ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.*

**Rozwiązanie**

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$

# 6. Informacja o egzaminie maturalnym z matematyki dla absolwentów niesłyszących

## 6.1. EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI DLA ABSOLWENTÓW NIESŁYSZĄCYCH

Egzamin maturalny z matematyki dla absolwentów niesłyszących sprawdza – podobnie jak w przypadku arkusza standardowego – w jakim stopniu absolwent spełnia wymagania z zakresu tego przedmiotu określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla IV etapu edukacyjnego w zakresie rozszerzonym i podstawowym. W zadaniach zestawu egzaminacyjnego mogą też być sprawdzane wymagania z etapów wcześniejszych.

Ogólne informacje o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015, krótka charakterystyka arkusza egzaminacyjnego oraz najważniejsze zasady dotyczące oceniania wypowiedzi zdających, przedstawione w częściach 1. – 3. *Informatora*, dotyczą również arkuszy dla absolwentów niesłyszących. Jednak zgodnie z zapisami odpowiedniego rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej[1], absolwenci niepełnosprawni przystępują do egzaminu maturalnego w warunkach i formie dostosowanych do rodzaju ich niepełnosprawności.

Dostosowania obejmują:

- w odniesieniu do formy egzaminu maturalnego m.in.
  - zmianę sposobu sformułowania niektórych zadań (zamiana słów, zwrotów lub całych zdań), jeżeli mogłyby one być niezrozumiałe lub błędnie zrozumiane przez osoby niesłyszące (nie dotyczy to terminów typowych dla danej dziedziny wiedzy),
  - zmianę schematu punktowania niektórych zadań,
- w odniesieniu do warunków przeprowadzania egzaminu maturalnego m.in.
  - przedłużenie czasu przewidzianego na przeprowadzenie egzaminu,
  - możliwość korzystania ze słowników językowych.

Poniżej przedstawione zostały przykładowe zadania ilustrujące dostosowania dla absolwentów niesłyszących. Numeracja zadań odpowiada numeracji zadań w części 4. i 5. Jeżeli zadanie nie zostało przedstawione poniżej, oznacza to, że wersja dla niesłyszących nie różni się niczym od wersji przedstawionej w wyżej wymienionych częściach.

Szczegółowa informacja na temat zakresu dostosowania **warunków** przeprowadzania egzaminu maturalnego dla absolwentów niesłyszących ogłaszana jest w komunikacie Dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sierpniu poprzedzającym rok szkolny, w którym jest przeprowadzany egzamin maturalny, na stronie internetowej CKE.

[1] Tj. § 7 ust. 1 rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 17 listopada 2010 r. w sprawie warunków organizowania kształcenia, wychowania i opieki dla dzieci i młodzieży niepełnosprawnych oraz niedostosowanych społecznie w przedszkolach, szkołach i oddziałach ogólnodostępnych lub integracyjnych (Dz.U. Nr 228, poz. 1490, z późn. zm.).

## 6.2. PODSTAWOWE ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OTWARTYCH

W **zadaniach krótkiej odpowiedzi** zdający otrzymuje 1 lub 2 punkty za rozwiązanie, którego nie doprowadził do końca lub w którym zrobił błędy; określony jest jednak minimalny postęp, które w tym rozwiązaniu musi być osiągnięty, by otrzymać 1 punkt, oraz co powinno być w rozwiązaniu, by można było je ocenić na 2 punkty.

W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi zostaje wyróżniona najważniejsza faza, nazywana **pokonaniem zasadniczych trudności zadania**. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za bezbłędne rozwiązanie tego zadania. Tak więc w zadaniu za 4 punkty, za pokonanie zasadniczych trudności przyznajemy 2 lub 3 punkty (zależnie od zadania). W zadaniu za 5 punktów za pokonanie zasadniczych trudności zadania na ogół przyznajemy 3 punkty. W zadaniach za 6 punktów – na ogół 3 lub 4 punkty. Wyróżnienie w rozwiązaniu zadania rozszerzonej odpowiedzi fazy pokonania zasadniczych trudności zadania powoduje następnie wyróżnienie kilku innych faz. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżniamy jeszcze jedną lub dwie fazy je poprzedzające: dokonanie niewielkiego postępu, który jednak jest konieczny dla rozwiązania zadania oraz dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania. Zdający, który pokonał zasadnicze trudności zadania, mógł na tym poprzestać lub mógł kontynuować rozwiązanie. Wyróżniamy ważną kategorię rozwiązań, w których zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i kontynuował rozwiązanie do końca, jednak w rozwiązaniu zrobił błędy niewpływające na poprawność całego rozumowania (na przykład nieistotne dla całego rozumowania błędy rachunkowe lub niektóre błędy nieuwagi). Tak samo wyróżniamy kategorię pokonania zasadniczych trudności z nieistotnymi błędami. W każdym przypadku określana jest liczba punktów przyznawana za rozwiązania w każdej (lub niektórych) z powyższych kategorii. Należy podkreślić, że schemat oceniania rozwiązania zadania jest traktowany jako integralna część zadania; na ogół ten schemat oceniania uwzględnia wszystkie typowe sposoby rozwiązania i czasami również niektóre nietypowe.

Zatem w zadaniu za 3 punkty:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu.....0 pkt
2. rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .....1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie .....2 pkt
4. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .....3 pkt

Natomiast w zadaniu za 4 punkty:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu .....0 pkt
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, lub w czasie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały zrobione błędy, usterki .....1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym skończył lub błędnie kontynuował rozwiązanie .....2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu są błędy, usterki .....3 pkt
5. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .....4 pkt

Poniżej zamieszczone zostały przykładowe sposoby przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania **zadań rozszerzonej odpowiedzi**.

Najprostszy podział punktów za rozwiązanie zadania za 5 punktów wygląda następująco:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu .....0 pkt
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania ..... 1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w czasie ich pokonywania zostały zrobione błędy .....2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie .....3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu zadania są usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) .....4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .....5 pkt

A oto inny przydział punktów w zadaniu za 5 punktów :

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu .....0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania .....1 pkt
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w czasie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały zrobione błędy, usterki .....2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie .....3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu są usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) .....4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .....5 pkt

Przykładowy sposób przydziału punktów w zadaniu za 6 punktów:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu .....0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .....1 pkt
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .....2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w czasie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały zrobione błędy, usterki .....3 pkt
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie .....4 pkt
6. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu zadania są usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) .....5 pkt
7. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .....6 pkt

Poniżej zamieszczone zostały przykłady zadań wraz z rozwiązaniami, opisem sposobu przyznawania punktów i uwagami, które mogą być pomocne w lepszym zrozumieniu sposobu oceniania na poziomie rozszerzonym.

## 6.3. PRZYKŁADY ZADAŃ WRAZ Z ROZWIĄZANIAMI I OPISEM SPOSOBU PRZYZNAWANIA PUNKTÓW

### Zadanie I (0–3)

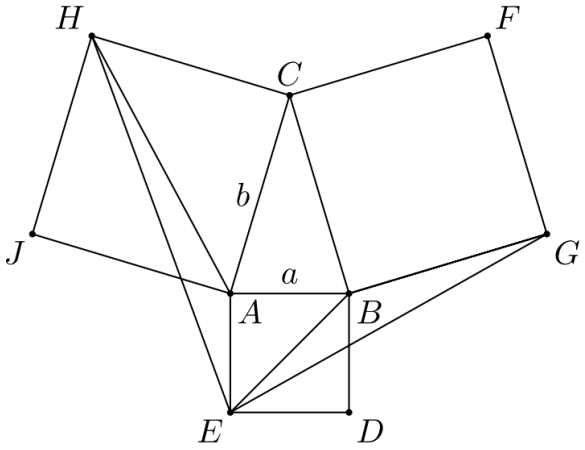
Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny *ABC*, w którym $|AC| = |BC|$. Na bokach, na zewnątrz trójkąta *ABC*, zbudowano kwadraty *ABDE*, *BCFG* i *ACHJ*. Udowodnij, że pola trójkątów *AHE* i *BEG* są równe.

**Rozwiązanie**

Omówimy cztery sposoby rozwiązania tego zadania.

**Sposób I** (trygonometryczny)

Przyjmijmy oznaczenia:




$$|AB| = |AE| = a, \quad |AC| = |BC| = |BG| = b, \quad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha.$$

Rozwiązanie tym sposobem polega na obliczeniu dwóch szukanych pól za pomocą *a*, *b* i $\alpha$. Mamy bowiem:

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin EAH ,$$

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin EBG .$$

Zauważmy, że: $|AE| = a$ oraz $|BG| = b$. Obliczamy długości odcinków *AH* i *BE* oraz wyrażamy za pomocą $\alpha$ miary kątów *EAH* i *EBG*.

Mamy:

$$|AH| = b\sqrt{2},$$

$$|BE| = a\sqrt{2}.$$

Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny i ostrokątny, więc $\alpha > 45°$. Następnie

$$|\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAH| = 90° + \alpha + 45° = 135° + \alpha > 135° + 45° = 180°,$$

a więc kąt wypukły *EAH* jest równy

$$360° - (135° + \alpha) = 225° - \alpha.$$

Podobnie,

$$|\sphericalangle GBC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle EBA| = 90° + \alpha + 45° = 135° + \alpha > 135° + 45° = 180°,$$

a więc kąt wypukły *EBG* jest równy

$$360° - (135° + \alpha) = 225° - \alpha.$$

Zatem

$$|\sphericalangle EAH| = 225° - \alpha = |\sphericalangle EBG|.$$

Stąd otrzymujemy

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin EAH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sqrt{2} \cdot \sin(225° - \alpha)$$

oraz

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin EBG = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot b \cdot \sin(225° - \alpha).$$

Stąd wynika, że $P_{AHE} = P_{BEG}$, co kończy dowód.

**Komentarz**

Rozwiązanie składa się z trzech kroków: obliczenie długości boków *AH* i *BE*, udowodnienie równości kątów *EAH* i *EBG* (np. przez wyznaczenie obu kątów za pomocą $\alpha$) oraz zastosowanie wzoru na pole trójkąta.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu wszystkich wielkości potrzebnych we wzorach na pole. Jeden z możliwych błędów zdających, na który należy zwrócić tu uwagę, może polegać na złym zastosowaniu wzoru na pole trójkąta (np. pominięcie współczynnika $\frac{1}{2}$). Pomimo tego błędu zdający otrzymuje poprawny wynik.

W takim przypadku uznajemy rozwiązanie za niedokończone – bezbłędnie zostały pokonane tylko zasadnicze trudności zadania.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Obliczenie długości boków $AH$ i $BE$ za pomocą boków $AB$ i $AC$

lub

udowodnienie, że $\left|\sphericalangle EAH\right| = \left|\sphericalangle EBG\right|$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie długości boków $AH$ i $BE$ za pomocą boków $AB$ i $AC$ oraz udowodnienie, że

$\left|$

**Sposób II** (stosunek pól)

W tym rozwiązaniu korzystamy z następującej własności trójkątów:

Dane są dwa trójkąty $ABC$ i $DEF$ takie, że $\sphericalangle A = \sphericalangle D$

Wówczas

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

Powyższa proporcja wyraża w sposób czysto geometryczny tę samą treść co wzór trygonometryczny na pole trójkąta. Mianowicie mamy:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A$$

oraz

–

**Sposób III** (geometria analityczna)

Rozwiązanie zadania sposobem analitycznym składa się z trzech kroków. Po pierwsze, w wygodny sposób umieszczamy rozważane figury geometryczne w układzie współrzędnych – lub równoważnie – do istniejących figur dobieramy układ współrzędnych. Po drugie, w przyjętym układzie współrzędnych obliczamy współrzędne potrzebnych punktów. Wreszcie, za pomocą obliczonych współrzędnych, obliczamy wielkości, o które chodzi w zadaniu.

W naszym przypadku te kroki sprowadzają się do:

- wyboru układu współrzędnych;
- obliczenia współrzędnych wierzchołków trójkątów $AHE$ i $BEG$;
- obliczenia pól trójkątów $AHE$ i $BEG$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu współrzędnych wierzchołków trójkątów□

- Korzystamy z tego, że jeśli obrócimy wektor $[x, y]$ o $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to otrzymamy wektor $[y, -x]$. (Tę własność można łatwo odczytać z rysunku i zapamiętać.) W naszym zadaniu mamy $\overrightarrow{CA} = [-a, -h]$, skąd $\overrightarrow{CH} = [-h, a]$. Stąd dostajemy $H \quad C \quad CH \quad (0,h) \quad [\ h,a] \quad (\ h,a \quad h)$

Zauważmy też, że pole trójkąta *AHE* można obliczyć prościej: podstawa *AE* ma długość $2a$, wysokość (niezaznaczona na rysunku) ma długość $h-a$.

**Uwaga**

Pola trójkątów można też obliczyć inaczej. Można np. wyznaczyć długość jednego boku, równanie prostej zawierającej ten bok oraz odległość trzeciego wierzchołka od tej prostej (odpowiednie wzory także znajdują się w tablicach).

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Umieszczenie trójkąta *ABC* w układzie współrzędnych i podanie współrzędnych jego wierzchołków.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktów *E*, *G* i *H*.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

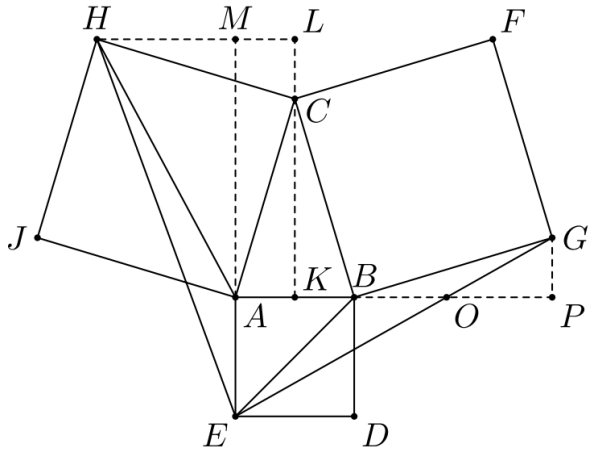
Obliczenie pól trójkątów *AHE* i *BEG* np. za pomocą wzorów znajdujących się w tablicach i zauważenie, że te pola są równe.

**Uwaga**

Zdający rozwiązujący zadanie tym sposobem mogą popełnić bardzo wiele różnych błędów: na przykład, mogą źle wyznaczyć współrzędne punktów *E*, *G* i *H* lub mogą źle obliczyć pola

**Sposób IV** (bezpośrednie obliczenie pól)

Prowadzimy w trójkącie *ABC* wysokość *CK*. Następnie niech punkt *L* będzie rzutem punktu *H* na prostą *KC* i niech punkt *P* będzie rzutem punktu *G* na prostą *AB*.




Wówczas widać, że trójkąty *CLH* i *BPG* są przystające do trójkątów *AKC* i *BKC*. Mianowicie $|CH| = |AC| = |BC| = |BG|$. Jeśli następnie

$$\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|,$$

to $|\sphericalangle ACK| = 90° - \alpha$, $|\sphericalangle HCL| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CHL| = 90° - \alpha$. Podobnie, $|\sphericalangle BCK| = \alpha$, $|\sphericalangle GBP| = 90° - \alpha$ oraz $|\sphericalangle BGP| = \alpha$. Wspomniane przystawania trójkątów wynikają teraz z cechy przystawania *kbk*.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$a = |AK| = |BK|, \quad h = |CK|.$$

Wówczas $|HL| = |BP| = h$ oraz $|CL| = |GP| = a$. Ponadto $a < h$. Niech następnie punkt *M* będzie rzutem punktu *A* na prostą *HL*. Ponieważ $a < h$, więc punkt *M* leży wewnątrz odcinka *HL*. Możemy już obliczyć pole trójkąta *EAH*. Mianowicie

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |HM| = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (h - a) = a(h - a).$$

Następnie niech punkt *O* będzie punktem przecięcia prostych *EG* i *AP*. Z podobieństwa trójkątów *EAO* i *GPO* wynika, że

$$\frac{|AO|}{|PO|} = \frac{|AE|}{|PG|} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Zatem

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot |AP| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h),$$

skąd wynika, że

$$|BO| = |AO| - |AB| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h) - 2a = \frac{2}{3} \cdot (h - a).$$

Wreszcie

$$P_{EBG} = P_{EBO} + P_{GBO} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |AE| + \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |GP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (h-a) \cdot (2a+a) = a(h-a).$$

To kończy dowód.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 1 pkt**

Dorysowanie trójkątów *CLH* i *GPB* oraz zauważenie, że są one przystające do trójkąta *AKC* (lub *BKC*). Nie wymagamy w tym miejscu od zdającego pełnego dowodu przystawania; przyjmujemy, że uzasadnienie przystawania jest oczywiste.

**Pokonanie zasadniczych m i s M**

W sumie okazuje się, że mamy 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Od otrzymanego wyniku musimy zatem odjąć 21. Następnie mamy jedną liczbę (mianowicie 999) z trzema dziewiątkami. Policzyliśmy ją trzykrotnie, więc od otrzymanego wyniku musimy jeszcze odjąć 2. Zatem liczb, które nas interesują, jest $185-21-2=162$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Pokazane na początku rozwiązanie błędne zawiera istotne elementy rozumowania prawidłowego, więc powinno być ocenione jako rozwiązanie częściowe. Uznajemy je za ,,istotny postęp".

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb.

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb, że przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb i że przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb. Nie wymagamy, by w tej kategorii otrzymał wynik łączny 185 liczb.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający otrzyma wynik 185 liczb, następnie zauważy, że pewne liczby policzono

- W pierwszej grupie znajduje się 50 liczb: na pierwszym miejscu jest dziewiątka, na drugim dowolna z 10 cyfr i na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W drugiej grupie znajduje się 40 liczb: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (nie może być 0 i 9), na drugim miejscu jest dziewiątka i na trzecim jedna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W trzeciej grupie znajdują się 72 liczby: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (jak wyżej), na drugim jedna z 9 cyfr (nie może być 9) i na trzecim miejscu znajduje się dziewiątka.

Łącznie mamy zatem 162 liczby.

**Komentarz**

Zdający rozwiązujący zadanie tą metodą pewnie wie o niebezpieczeństwie i prawdopodobnie nie popełni większych błędów. Możliwe są natomiast drobne błędy rachunkowe.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Zdający prawidłowo zdefiniuje trzy grupy liczb.

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy, ile jest liczb w co najmniej jednej z tych trzech grup.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający prawidłowo obliczy, ile jest liczb w każdej z tych trzech grup. Za prawidłowy wynik w dwóch grupach zdający otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+40+72=162.$$

**Sposób III** (liczba dziewiątek)

Najpierw policzymy liczby, w których jest tylko jedna cyfra 9. Tym razem zastosujemy metodę znaną z powyższego błędnego rozwiązania, jednak użycie tej metody będzie poprawne, gdyż jest tylko jedna cyfra 9. Możemy umieścić ją na jednym z trzech miejsc.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 36 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 32 liczby.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku 72 liczby.

W sumie daje to $36+32+72=140$ liczb.

Teraz policzymy liczby, w których są dwie cyfry 9.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr.

W sumie daje to $4+8+9=21$ liczb.

Wreszcie mamy jedną liczbę z trzema dziewiątkami: 999.

Mamy więc $140+21+1=162$ liczby.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Istotny postęp ..... 2 pkm ..y**

**Sposób V**(zasada włączeń i wyłączeń)

Niektórzy uczniowie mogą zastosować w rozwiązaniu zasadę włączeń i wyłączeń, choć nie ma jej w podstawie programowej – mogli ją na przykład odkryć samodzielnie, jako intuicyjnie niemal oczywistą regułę.

Niech $A$ będzie zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na pierwszym miejscu, $B$ zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na drugim miejscu i wreszcie $C$ zbiorem nieparzystych z dziewiątką na trzecim miejscu. Zbiorem liczb, które nas interesują, jest oczywiście zbiór $A \cup B \cup C$. Nietrudno teraz zauważyć, że:

$$|A| = 50,\ |B| = 45,\ |C| = 90$$

$$|A \cap B| = 5,\ |A \cap C| = 10,\ |B \cap C| = 9$$

$$|A \cap B \cap C| = 1$$

Z zasady włączeń i wyłączeń dostajemy

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 50 + 45 + 90 - 5 - 10 - 9 + 1 = 162.$$

**Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**

**Postęp niewielki ..... 1 pkt**

Zdający zdefiniuje zbiory $A$, $B$ i $C$ i zauważy, że ma obliczyć $|A \cup B \cup C|$.

**Postęp większy ..... 2 pkt**

Zdający obliczy $|A|$, $|B|$ i $|C|$.

**Istotny postęp ..... 3 pkt**

Zdający obliczy $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ i $|A \cap B \cap C|$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i podstawi do niego prawidłowe dane. Jeśli zdający zdefiniuje zbiory $A$, $B$ i $C$, poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i poprawnie obliczy co najmniej $|A|$, $|B|$ i $|C|$ oraz popełni błędy w pozostałych obliczeniach, to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

**Uwaga**

Jeśli zdający tylko zdefiniuje zbiory $A$, $B$ i $C$ oraz poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń, to otrzymuje **2 punkty**.

**Sposób VI** (wypisywanie liczb w kolejności rosnącej)

Ten sposób rozwiązania może naprowadzić zdającego na stosunkowo proste rozwiązanie. Oczywiście wypisywanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania nie może być dokonywane bez zastanowienia. Nie chodzi zatem o wypisanie w kolejności rosnącej wszystkich liczb trzycyfrowych (jest ich 900), wykreśleniu liczb parzystych oraz liczb, w których nie występuje dziewiątka i zliczeniu liczb niewykreślonych. Jeśli zdający nie popełni błędu, powinien otrzymać 162 liczby. Oczywiście takie rozwiązanie, wykonane bezbłędnie, powinno być ocenione na 5 punktów.

Zdający może również wypisywać w kolejności rosnącej tylko właściwe liczby. Oto poprawny wynik:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 109 | 119 | 129 | 139 | 149 | 159 | 169 | 179 | 189 |
| 191 | 193 | 195 | 197 | 199 | | | | |
| 209 | 219 | 229 | 139 | 249 | 259 | 269 | 279 | 289 |
| 291 | 293 | 295 | 297 | 299 | | | | |
| 309 | 319 | 329 | 339 | 349 | 359 | 369 | 379 | 389 |
| 391 | 393 | 395 | 397 | 399 | | | | |
| 409 | 419 | 429 | 439 | 449 | 459 | 469 | 479 | 489 |
| 491 | 493 | 495 | 497 | 499 | | | | |
| 509 | 519 | 529 | 539 | 549 | 559 | 569 | 579 | 589 |
| 591 | 593 | 595 | 597 | 599 | | | | |
| 609 | 619 | 629 | 639 | 649 | 659 | 669 | 679 | 689 |
| 691 | 693 | 695 | 697 | 699 | | | | |
| 709 | 719 | 729 | 739 | 749 | 759 | 769 | 779 | 789 |
| 791 | 793 | 795 | 797 | 799 | | | | |
| 809 | 819 | 829 | 839 | 849 | 859 | 869 | 879 | 889 |
| 891 | 893 | 895 | 897 | 899 | | | | |
| 901 | 903 | 905 | 907 | 909 | | | | |
| 911 | 913 | 915 | 917 | 919 | | | | |
| 921 | 923 | 925 | 927 | 929 | | | | |
| 931 | 933 | 935 | 937 | 939 | | | | |
| 941 | 943 | 945 | 947 | 949 | | | | |
| 951 | 953 | 955 | 957 | 959 | | | | |
| 961 | 963 | 965 | 967 | 969 | | | | |
| 971 | 973 | 975 | 977 | 979 | | | | |
| 981 | 983 | 985 | 987 | 989 | | | | |
| 991 | 993 | 995 | 997 | 999 | | | | |

W pierwszych 16 wierszach mamy ośmiokrotnie wiersz z 9 liczbami i wiersz z 5 liczbami. W następnych 10 wierszach mamy po 5 liczb. Łącznie zatem wypisano

$$8\cdot(9+5)+10\cdot 5=162$$

liczby.

W trakcie wypisywania możemy zauważyć regułę i ją opisać: najpierw występują liczby zaczynające się od cyfry różnej od 9 (mamy tu 8 możliwości). Dla każdej takiej pierwszej cyfry $c$ mamy 9 liczb postaci

$$c09,\quad c19,\quad c29,\quad c39,\quad c49,\quad c59,\quad c69,\quad c79,\quad c89,$$

po których przychodzi 5 liczb postaci

$$c91,\quad c93,\quad c95,\quad c97,\quad c99.$$

Dla każdej cyfry $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ wypiszemy w ten sposób 14 liczb. To łącznie daje $8 \cdot 14 = 112$ liczb. Następnie wypisujemy liczby zaczynające się od dziewiątki. Warunek mówiący, że w zapisie liczby występuje dziewiątka, jest teraz spełniony; na drugim miejscu może zatem wystąpić dowolna z 10 cyfr, a na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 2, 5, 7, 9. To daje łącznie 50 liczb, a więc ostatecznie dostajemy 162 liczby.

**Komentarz**

Zdający mogą próbować wypisywać liczby w różnej kolejności, stosując różne strategie. W przypadku, gdy zdający wyłącznie wypisuje liczby i podaje ostateczną odpowiedź, uznajemy tylko rozwiązania całkowicie bezbłędne: odpowiedź 162 popartą poprawną listą liczb. Za takie rozwiązanie zdający powinien otrzymać **5 punktów**. Za rozwiązania polegające na wypisywaniu liczb, niezawierające wyjaśnień i prowadzące do błędnej odpowiedzi zdający powinien otrzymać **0 punktów**. Jeśli zdający poda odpowiedź poprawną (162 liczby) bez jakiegokolwiek uzasadnienia, to za takie rozwiązanie można otrzymać co najwyżej **1 punkt**. Jeśli natomiast poprawna odpowiedź jest poparta nieprawidłową listą liczb, to zdający otrzymuje **0 punktów**.

Metoda polegająca na wypisywaniu liczb może – jak widzieliśmy wyżej – prowadzić do trafnych uogólnień. Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na dokonaniu dwóch obserwacji: dla każdej cyfry różnej od 0 i 9 mamy 14 interesujących nas liczb zaczynających się tą cyfrą oraz dla cyfry 9 mamy 50 liczb zaczynających się tą cyfrą.

**Schemat oceniania VI sposobu rozwiązania**

Jeśli zdający opisze regułę prowadzącą do wypisania poprawnej listy, to przyznajemy punkty według następującego schematu:

**Istotny postęp ..... 2 pkt**

- Zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest różna od 9, to mamy 14 liczb

lub

- zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest dziewiątką, to mamy 50 liczb.

Uznajemy w tej kategorii rozwiązania, w których zdający wypisze w wyraźnie wyodrębnionej grupie 14 liczb zaczynających się np. od jedynki i wskaże (np. za pomocą trzech kropek), że ta sama reguła obowiązuje dla pozostałych pierwszych cyfr różnych od dziewiątki. Uznajemy także rozwiązania, w których zdający wyłącznie obliczy, że jest 50 liczb nieparzystych zaczynających się od dziewiątki.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 pkt**

Zdający zauważy obie reguły opisane w poprzedniej kategorii.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i ponadto poprawnie obliczy liczbę wszystkich rozważanych liczb: $8 \cdot 14 + 50 = 162$.

**Uwaga**

W tej metodzie rozwiązania zdający może popełnić wiele błędów. Na przykład, może wypisując liczby zaczynające się cyfrą 1 nie zauważyć, że liczba 199 pojawia się dwukrotnie: raz w ciągu 10 liczb

109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199

i drugi raz w ciągu liczb

191, 193, 195, 197, 199.

Jeśli zdający wyłącznie zauważy, że istnieje 15 liczb zaczynających się od cyfry różnej od 9, powinien otrzymać 1 punkt. Inny błąd może polegać na złym obliczeniu, ile jest liczb zaczynających się od dziewiątki. Zdający może na przykład zapomnieć, że rozważamy wyłącznie liczby nieparzyste i przyjmie, że istnieje 100 takich liczb. Za taką obserwację też powinien otrzymać 1 punkt. Te błędy mogą prowadzić do następujących błędnych odpowiedzi:

$$8 \cdot 15 + 50 = 170$$

oraz

$$8 \cdot 14 + 100 = 192.$$

Za doprowadzenie rozwiązania do końca z jednym z tych dwóch błędów zdający powinien otrzymać 4 punkty. Oba opisane błędy prowadzą do odpowiedzi

$$8 \cdot 15 + 100 = 220,$$

za którą zdający powinien otrzymać 3 punkty.

## Zadanie III (0–3)

Wykaż, że jeżeli $x>0$, to $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$.

**I sposób rozwiązania** (pierwsza pochodna)

Definiujemy funkcję $f$ określoną wzorem $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ dla $x\in(0,+\infty)$.

Funkcja $f$ jest różniczkowalna, obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

Ponieważ $x^2+2x+4>0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$, to

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

Wynika stąd, że funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $(0,2\rangle$ i jest rosnąca

w przedziale $\langle 2,+\infty)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczamy $f(2)=4+\frac{16}{2}=12$, stąd wynika, że $f(x)\geq 12$ co należało udowodnić.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Określenie funkcji $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ dla $x\in(0,+\infty)$ i obliczenie jej pochodnej

$$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Obliczenie miejsca zerowego pochodnej i wyznaczenie przedziałów, w których pochodna ma „stały znak”:

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Stwierdzenie, że funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $\left(0,2\right\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\left\langle 2,+\infty\right)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczenie $f(2)=12$ i zapisanie wniosku: $f(x)\geq 12$, co należało udowodnić.

**Uwagi**

1. Zdający po obliczeniu, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$, może uzasadnić tezę korzystając z drugiej pochodnej funkcji $f$.
2. Jeżeli zdający obliczy, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$ i stąd już wywnioskuje, że: $f(x)\geq f(2)=12$, to za rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

**Komentarz**

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który nie zmieni miejsc zerowych pochodnej i dalej doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać za całe zadanie maksymalnie **2 punkty**.

Przykłady tego typu błędów:

$$f'\left(x\right)=\frac{2x^3-16}{x},$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2\left(x-2\right)\left(x^2+x+4\right)}{x^2},$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2\left(x-2\right)\left(x^2+2x+2\right)}{x^2}.$$

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który zmienia miejsca zerowe pochodnej, to otrzymuje za zadanie **0 punktów**.

**II sposób rozwiązania** (przekształcenia równoważne)

Zapisujemy nierówność $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ i przekształcamy ją równoważnie:

$$x^2-4x+4+\frac{16}{x}+4x-16\geq 0,$$

$$x^2-4x+4+\frac{4}{x}\left(x^2-4x+4\right)\geq 0,$$

$$(x-2)^2+\frac{4}{x}(x-2)^2\geq 0,$$

$$(x-2)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)\geq 0.$$

Jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, jako iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego, co należało udowodnić.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci $x^2-4x+4+\frac{16}{x}+4x-16\geq 0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2+\frac{4}{x}(x-2)^2\geq 0$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

- Zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)\geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego jest nieujemny, co kończy dowód

albo

- zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2+\frac{4}{x}(x-2)^2\geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, co kończy dowód.

**III sposób rozwiązania** (funkcja wymierna)

Zapisujemy nierówność $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ w postaci równoważnej $\frac{x^3-12x+16}{x}\geq 0$.

Przy założeniu $x>0$, nierówność ta jest równoważna nierówności $x^3-12x+16\geq 0$ dla $x>0$

Określamy wielomian $W(x)=x^3-12x+16$.

Stwierdzamy, że jednym z miejsc zerowych wielomianu $W$ jest liczba $2$. Po podzieleniu wielomianu $W$ przez dwumian $x-2$ otrzymujemy iloraz $x^2+2x-8$, który zapisujemy w postaci iloczynowej $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$.

Stąd $W(x)=x^3-12x+16=(x-2)\left(x^2+2x-8\right)=(x-2)^2(x+4)$.

Stwierdzamy, że jeżeli $x>0$, to $W(x)\geq 0$ jako iloczyn czynników nieujemnych, co kończy dowód.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Stwierdzenie, że przy założeniu $x>0$, nierówność jest równoważna nierówności $x^3-12x+16\geq 0$ dla $x>0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Zapisanie wielomianu $W$ w postaci iloczynowej

$$W(x)=x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4).$$

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Uzasadnienie, że jeżeli $x>0$, to $W(x)\geq 0$, co kończy dowód.

**IV sposób rozwiązania** (zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej)

Niektórzy uczniowie mogą odwołać się do tej nierówności, choć nie ma jej w podstawie programowej i, jak widzieliśmy, rozwiązanie zadania nie wymaga jej znajomości. Lewą stronę nierówności zapisujemy w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

Przy założeniu $x>0$, korzystamy z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

$$\text{jeżeli } a>0,\ b>0,\ c>0, \text{ to } \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}, \text{ czyli } a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Podstawiając

$$a=x^2,\quad b=\frac{8}{x},\quad c=\frac{8}{x}$$

otrzymujemy

$$x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=3\sqrt[3]{64}=12.$$

Stąd wynika, że $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$, co kończy dowód.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie lewej strony nierówności w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 2 pkt**

Zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

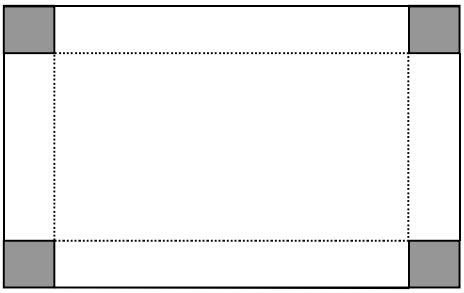
jeżeli $a>0$, $b>0$, $c>0$, to $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$, dla $a=x^2$, $b=\frac{8}{x}$, $c=\frac{8}{x}$.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zapisanie, że dla $x>0$, po zastosowaniu nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej otrzymujemy $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=12$, co kończy dowód.

## Zadanie IV (0–7)

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (na rysunku zaznaczone kolorem szarym). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.



**Rozwiązanie**

Oznaczmy literą $x$ długość boku kwadratowych naroży. Podstawa pudełka ma wymiary

$$(80-2x)\times(50-2x).$$

Wysokość pudełka jest równa $x$. Zatem objętość wyraża się wzorem

$$V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x,$$

czyli

$$V=(4000-160x-100x+4x^2)\cdot x=4x^3-260x^2+4000x=4\left(x^3-65x^2+1000x\right)$$

dla $0<x<25$.

Rozważmy funkcję $f(x)=x^3-65x^2+1000x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

Obliczamy pochodną tej funkcji: $f'(x)=3x^2-130x+1000$.

Następnie znajdujemy miejsca zerowe tej pochodnej:

$$\Delta=130^2-12\cdot1000=16900-12000=4900,$$

$$x_1=\frac{130-70}{6}=10,\ x_2=\frac{130+70}{6}=33\frac{1}{3}.$$

Ponadto:

$f'(x)>0$ w każdym z przedziałów $(-\infty,10)$ oraz $\left(\frac{100}{3},+\infty\right)$,

$f'(x)<0$ w przedziale $\left(10,\frac{100}{3}\right)$.

Zatem funkcja $f$ jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty,10\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{100}{3},\infty\right)$ i malejąca w przedziale $\left\langle 10,\frac{100}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $V\left(x\right)=4f\left(x\right)$ dla $x\in\left(0,25\right)$, więc w przedziale $\left(0,25\right)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=10$ funkcja $V$ przyjmuje wartość największą. Szukana objętość jest zatem równa $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18000\ \text{cm}^2$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wybór zmiennej i wyrażenie za pomocą tej zmiennej wielkości, które będą potrzebne do zdefiniowania funkcji. Oznaczenie literą $x$ długości boku kwadratowych naroży, zapisanie wymiarów podstawy pudełka $(80-2x)\times(50-2x)$,
- zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej, zapisanie objętości jako funkcji zmiennej wysokości pudełka $x$: $V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x$,
- określenie dziedziny funkcji $V$: $0<x<25$.

Zdający otrzymuje **2 punkty** za poprawne zdefiniowanie funkcji zmiennej $x$ opisującej objętość prostopadłościanu. Ponadto zdający otrzymuje **1 punkt** za poprawne określenie dziedziny wynikającej z treści zadania, a nie z wyznaczonego wzoru funkcji.

b) Drugi etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji $f$: $f'\left(x\right)=3x^2-130x+1000$,
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=10,\ x_2=33\frac{1}{3}$,
- uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja posiada wartość największą w punkcie $x=10$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap **(1 pkt)**.

Obliczenie największej objętości: $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18000\ \text{cm}^2$.

**Komentarz**

Zdający rozwiązując zadanie może nie doprowadzić rozumowania do końca lub popełnić różnego rodzaju błędy np.:

1. Błędne określenie dziedziny funkcji $V$ np. zapisanie $x>0$ lub $x<50$. Jeżeli zdający nie poda dziedziny funkcji lub poda ją błędnie, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **6 punktów**.
2. Błędne zapisanie wzoru na objętość pudełka (np. błędne określenie wymiarów pudełka lub wzoru na objętość prostopadłościanu).
3. Niewłaściwe wyznaczenie pochodnej rozważanej funkcji.
4. Nieprawidłowo obliczone miejsca zerowe pochodnej.
5. Błędne określenie monotoniczności funkcji oraz jej ekstremów.
6. Brak uzasadnienia, błędne lub niepełne uzasadnienie, że funkcja $V$ w punkcie $x=10$ przyjmuje maksimum lokalne.
7. Nieobliczenie lub błędne obliczenie największej objętości pudełka.

Schemat oceniania pokazuje jak w poszczególnych sytuacjach ocenić rozwiązanie zadania.

## 6.4. PRZYKŁADOWE ZADANIA Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM DLA ABSOLWENTÓW NIESŁYSZĄCYCH WRAZ Z ROZWIĄZANIAMI

Numeracja zadań w części 6.4. odpowiada numeracji zadań w części 4. Jeżeli zadanie nie zostało przedstawione poniżej, oznacza to, że wersja dla niesłyszących nie różni się niczym od wersji przedstawionej w części 4.

### Zadanie 16. (0–1)

Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma miar tych kątów jest równa $180^\circ$. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. $60^\circ$ B. $90^\circ$ C. $120^\circ$ D. $135^\circ$

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*7.1. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.*

**Rozwiązanie** C

### Zadanie 21. (0–1)

W kinie jest 5 wolnych miejsc. Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch miejscach, jest równa

A. 25 B. 20 C. 15 D. 12

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.*

**Rozwiązanie** B

## Zadanie 23. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \leq 0$.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*3.5. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.*

**Rozwiązanie**

Korzystamy ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego lub rozkładamy trójmian na czynniki $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$. Trójmian kwadratowy $y = x^2 + 6x - 7$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. Ponieważ parabola o równaniu $y = x^2 + 6x - 7$ ma ramiona skierowane do góry, to leży ona poniżej osi $Ox$ między swoimi miejscami zerowymi. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział domknięty $\langle -7, 1 \rangle$.

## Zadanie 24. (0–2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*4.11. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.*

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 1$. Mamy $x_w = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -8$. Ponieważ parabola ma ramiona skierowane do góry, to w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ dana funkcja maleje. Dlatego maleje także na zawartym w nim przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Dlatego najmniejszą wartość funkcja ma w prawym końcu, czyli dla $x = 1$. Tą wartością jest $y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -4$.

## Zadanie 26. (0–2)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 11$ i przechodzącej przez punkt $P = (1, 2)$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*8.3. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.*

### Rozwiązanie

Wszystkie proste równoległe do danej prostej mają taki sam współczynnik kierunkowy. Dlatego szukamy prostej o równaniu $y = 2x + b$. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P = (1, 2)$, otrzymujemy $2 = 2 \cdot 1 + b$, więc $b = 0$. Dlatego prosta ta ma równanie $y = 2x$.

## Zadanie 27. (0–2)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową *CD* trójkąta *ABC*, którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (7, 10)$.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

### Wymagania szczegółowe

*8.5.Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka.*
*8.1. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).*

### Rozwiązanie

Wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $C = (7, 10)$ oraz że przechodzi przez punkt *D,* który jest środkiem boku *AB*. Dlatego korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy $D = \left( \frac{-2+6}{2}, \frac{-1+1}{2} \right) = (2, 0)$. Ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty otrzymujemy: $(y - 10)(2 - 7) - (0 - 10)(x - 7) = 0$, a stąd $-5y + 10x - 20 = 0$, czyli $-y + 2x - 4 = 0$.

## Zadanie 28. (0–2)

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę $\alpha$. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

### Wymagania szczegółowe

*6.1.Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.*

### Rozwiązanie

Niech $\alpha$ będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 2, a $\beta$ niech będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 4. Zauważmy, że $\sin\alpha = \cos\beta$ oraz $\cos\alpha = \sin\beta$, więc mamy $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$, czyli szukana wartość nie zależy od wyboru kąta.

Przeciwprostokątna w danym trójkącie ma długość $\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

## Zadanie 29. (0–2)

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\mathrm{tg}^2\alpha$.

### Wymagania ogólne

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

### Wymagania szczegółowe

*6.4. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:*
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *oraz* $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

### Rozwiązanie

Mamy $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, więc $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{15}$.

Dlatego $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha = 3 + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$.

## Zadanie 30. (0–2)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg $(a_n)$ określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*
*Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.1.Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.*

**Rozwiązanie**

Szukamy liczb naturalnych $n \geq 1$ spełniających nierówność $n^2 - 2n - 24 < 0$.

Zapisujemy tę nierówność w postaci $n^2 - 2n + 1 - 25 < 0$, $(n-1)^2 - 5^2 < 0$, więc

$(n-1-5)(n-1+5) < 0$, $(n-6)(n+4) < 0$. Ponieważ $n+4 > 0$, otrzymujemy $n < 6$.

Dlatego liczba *n* może mieć jedną z pięciu wartości: 1, 2, 3, 4, 5, czyli ciąg ma pięć wyrazów ujemnych.

## Zadanie 32. (0–2)

Wyrazami ciągu arytmetycznego $(a_n)$ są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz $a_{15}$.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.*

**Rozwiązanie**

Ponieważ dokładnie co piąta liczba naturalna daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to różnica danego ciągu arytmetycznego równa się 5. Dlatego $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$, więc $a_1 = 2$.

Dlatego $a_{15} = a_1 + 14r = 2 + 14 \cdot 5 = 72$.

## Zadanie 33. (0–2)

Dany jest prostokąt o bokach *a* i *b*. Zmniejszamy długość boku *a* o 10% oraz zwiększamy długość boku *b* o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt o bokach *a* i *b*.

### Wymagania ogólne

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

### Wymagania szczegółowe

*5.4. (gimnazjum) Zdający stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.*

### Rozwiązanie

Otrzymany prostokąt ma boki długości $0,9a$ oraz $1,2b$. Z porównania obwodów tych prostokątów otrzymujemy związek $2\cdot 0,9a+2\cdot 1,2b=2a+2b$, skąd $0,4b=0,2a$. Dlatego $\frac{a}{b}=\frac{0,4}{0,2}=2$.

## Zadanie 34. (0–2)

Udowodnij, że jeśli *x*, *y* są liczbami rzeczywistymi, to $x^2+y^2\geq 2xy$.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.*

### Wymagania szczegółowe

*2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na* $(a\pm b)^2$ *oraz* $a^2-b^2$.

### Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb *x, y* mamy $(x-y)^2\geq 0$, więc $x^2+y^2\geq 2xy$, co kończy dowód.

## Zadanie 35. (0–2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.*

**Rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są pary liczb całkowitych $(a,b)$, gdzie $1 \le a,b \le 6$. Mamy 36 takich par. Zdarzenia elementarne sprzyjające to pary $(1,5)$ oraz $(5,1)$. Dlatego prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5 jest równe $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

## Zadanie 36. (0–4)

W ciągu arytmetycznym $(a_n)$ dane są wyrazy: $a_3 = 4, a_6 = 19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(0, 200)$?

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.*

**Rozwiązanie**

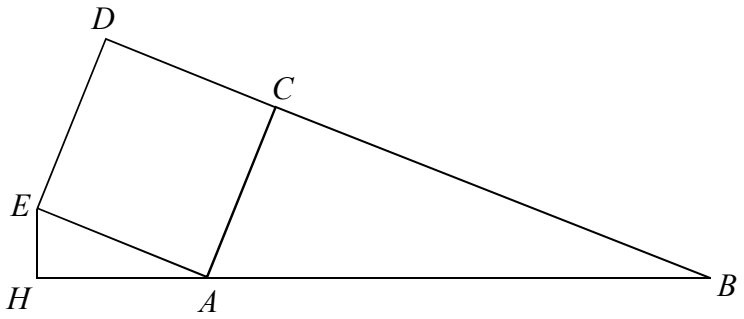
Mamy $4 = a_1 + 2r$, $19 = a_1 + 5r$. Więc $3r = 15, r = 5$ oraz $a_1 = -6$. Pytamy, dla jakich $n$ mamy $0 < a_n < 200$, czyli $0 < -6 + (n-1)\cdot 5 < 200$.

Więc $6 < 5(n-1) < 206, \quad \frac{6}{5} < n-1 < \frac{206}{5}, \quad \frac{11}{5} < n < \frac{211}{5}$.

Pierwszą nierówność spełniają liczby $n \ge 3$, a drugą nierówność liczby $n \le 42$. Dlatego jest 40 liczb naturalnych spełniających te dwa warunki i 40 wyrazów ciągu leży w przedziale $(0,200)$.

## Zadanie 37. (0–4)

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 5$, $|BC| = 12$ zbudowano kwadrat *ACDE* (zobacz rysunek). Punkt *H* leży na prostej *AB* i kąt $|\sphericalangle EHA| = 90°$. Oblicz pole trójkąta *HAE*.




### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

### Wymagania szczegółowe

*7.3. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.*

### Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąt prostokątny *EAH* jest podobny do trójkąta *ABC,* bo kąty *EAH* oraz *ABC* są przystające, jako kąty o ramionach równoległych. Oznaczymy przez *s* skalę podobieństwa trójkąta *EAH* do trójkąta *ABC*. Wtedy

$$P_{EAH} = s^2 P_{ABC} = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 s^2.$$

Następnie obliczamy *s*.

Mamy

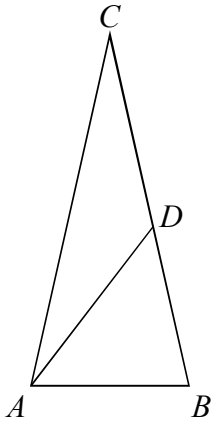
$$s = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{5}{13}.$$

Więc

$$P_{\Delta EAH} = 30 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{750}{169}.$$

## Zadanie 38. (0–4)

Punkt $D$ leży na boku $BC$ trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek $AD$ dzieli trójkąt $ABC$ na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ADC| = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$.



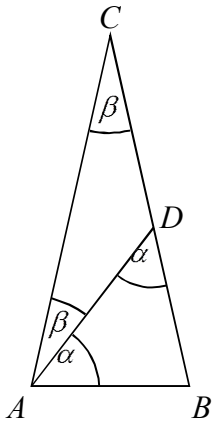

**Wymagania ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.17 (gimnazjum) Zdający rozpoznaje figury, które mają oś symetrii i figury, które mają środek symetrii. Wskazuje oś symetrii i środek symetrii figury.*

**Rozwiązanie I**




Niech $\alpha = |\sphericalangle BAD|$ i $\beta = |\sphericalangle ACD|$.

Trójkąty $ABD$, $ACD$ i $ABC$ są równoramienne, więc

$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \beta$

oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha + \beta$.

Suma miar kątów trójkąta $ACD$ jest równa $180°$, więc

$|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\beta$.

Wiadomo również, że $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$,

czyli $180° - 2\beta = 180° - \alpha$. Stąd $\alpha = 2\beta$.

Suma miar kątów trójkąta $ABC$ jest równa $180°$, więc $2(\alpha + \beta) + \beta = 180°$, czyli

$2(2\beta + \beta) + \beta = 180°$. Stąd $7\beta = 180°$.

Więc $|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$. To kończy dowód.

**Rozwiązanie II**

Oznaczmy kąty $\alpha$ i $\beta$ jak w poprzednim rozwiązaniu.

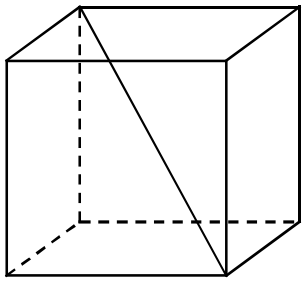
Ponieważ kąt $ADB$ jest kątem zewnętrznym trójkąta $ADC$, więc $\alpha = 2\beta$.

Również kąt $ADC$ jest kątem zewnętrznym trójkąta $ABD$, więc

$|\sphericalangle ADC| = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 4\beta + \beta = 5\beta = 5|\sphericalangle ACD|$, co kończy dowód.

## Zadanie 39. (0–2)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.



**Wymagania ogólne**

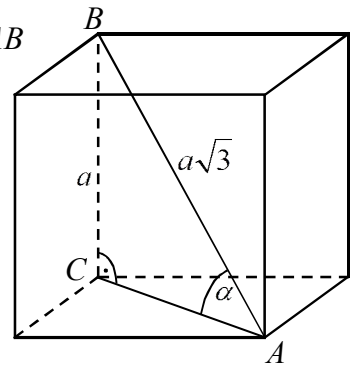
*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

**Wymagania szczegółowe**

*9.2. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.*

**Rozwiązanie**

Mamy trójkąt prostokątny $ABC$, utworzony przez przekątną $AB$ sześcianu, przekątną $AC$ podstawy sześcianu oraz krawędź $BC$, jak na rysunku. Kąt ostry $\alpha$ tego trójkąta jest kątem między przekątną sześcianu i płaszczyzną jego podstawy. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości $a$ jest równa $a\sqrt{3}$, więc sinus kąta $\alpha$ jest równy




$$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## Zadanie 40. (0–4)

W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości $d$ jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha$ takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Podaj objętość tego graniastosłupa w zależności od $d$.

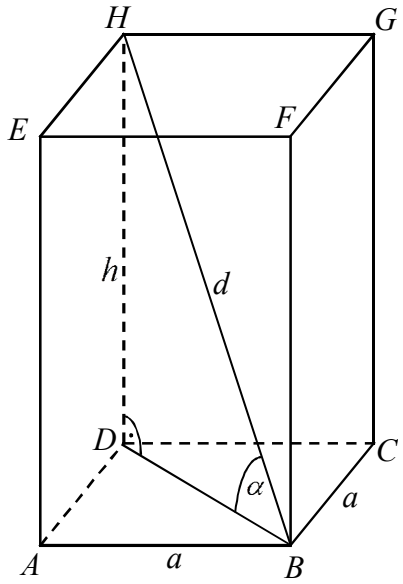
**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.*

**Rozwiązanie I**




Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Trójkąt *BDH* jest prostokątny, więc

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \text{ czyli } \frac{1}{5} = \frac{h}{d}. \text{ Stąd } h = \frac{1}{5}d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BDH* otrzymujemy

$$|BD|^2 = d^2 - h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{5}d\right)^2 = \frac{24}{25}d^2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|BD|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}d^2 = \frac{12}{25}d^2.$$

Dlatego objętość tego graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABCD}\cdot h = \frac{12}{25}d^2\cdot\frac{1}{5}d = \frac{12}{125}d^3.$$

**Rozwiązanie II**

Przyjmijmy oznaczenia jak w rozwiązaniu I.

Trójkąt *BDH* jest prostokątny, więc $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, czyli $h = d\sin\alpha$. Stąd $h = 0,2\,d$.

W trójkącie *BDH* mamy również $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, czyli $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0,2)^2} = \sqrt{0,96}\,d$.

Stąd $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0,96\,d^2\cdot 0,2\,d = 0,096\,d^3$.

## Zadanie 41. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w zapisie dziesiętnym tych liczb jest jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*
*Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.*

**Rozwiązanie**

Mamy 5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Musimy jednak pamiętać, że 0 nie może być pierwszą cyfrą zapisu dziesiętnego liczby. Dlatego mamy dwa przypadki: a) gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz b) gdy pierwsza cyfra jest parzysta.
W przypadku a) pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów; każda pozostała cyfra musi być parzysta i każdą z nich też możemy wybrać na 5 sposobów. Dlatego w przypadku a) mamy $5^4$ możliwości.
W przypadku b) cyfrę parzystą, stojącą na pierwszym miejscu, możemy wybrać na 4 sposoby. Na pozostałych miejscach mamy ustawić jedną cyfrę nieparzystą oraz dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej możemy wybrać na 3 sposoby; na pozostałych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Cyfrę na każdym z tych trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Dlatego w przypadku b) mamy $4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 12 \cdot 5^3$ możliwości.
W obu przypadkach łącznie otrzymujemy $5^4 + 12 \cdot 5^3 = (5+12) \cdot 5^3 = 17 \cdot 125 = 2125$ liczb spełniających warunki zadania.

## Zadanie 42. (0–4)

Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez oddawania losów do pojemnika. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy jeden lub dwa losy wygrywające. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

**Wymagania ogólne**

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.*

**Rozwiązanie I** (model klasyczny)

Oznaczmy przez $w_1$, $w_2$ losy wygrywające, a przez $p_1$, $p_2$, $p_3$ losy puste. Wszystkie wyniki losowania dwóch losów bez ich oddawania możemy przedstawić w tabeli: wynik pierwszego losowania wyznacza wiersz, a wynik drugiego losowania – kolumnę, w przecięciu których leży pole, odpowiadające tej parze losowań. Pola położone na przekątnej odrzucamy, gdyż odpowiadałyby one wylosowaniu dwa razy tego samego losu, a to jest niemożliwe, gdyż losujemy bez oddawania losu.

Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch losów, wśród których jeden lub dwa są wygrywające. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu $A$ zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

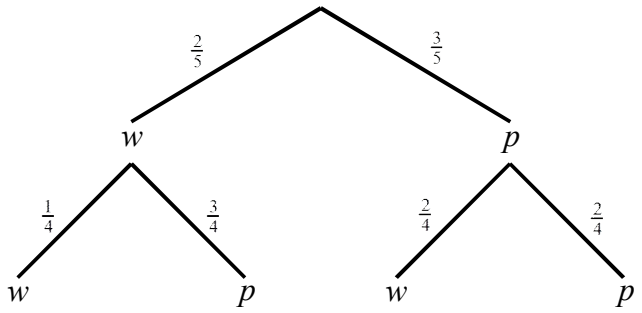
| | $w_1$ | $w_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | | x | x | x | x |
| $w_2$ | x | | x | x | x |
| $p_1$ | x | x | | | |
| $p_2$ | x | x | | | |
| $p_3$ | x | x | | | |

Mamy więc 20 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 20$, oraz 14 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, czyli $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

**Rozwiązanie II** (metoda drzewa)

Losowanie z pojemnika kolejno dwóch losów bez oddawania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie $w$ oznacza wylosowanie losu wygrywającego, a $p$ – losu pustego. Pogrubione gałęzie drzewa odpowiadają zdarzeniu $A$ polegającemu na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Na odcinkach drzewa zostały zapisane odpowiednie prawdopodobieństwa.




Więc prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2+6+6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

## Zadanie 43. (0–3)

Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

### Wymagania ogólne

*V. Rozumowanie i argumentacja.*
*Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.*

### Wymagania szczegółowe

*2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na* $(a \pm b)^2$ *oraz* $a^2 - b^2$.

### Rozwiązanie I

Dla dowodu przekształcimy w sposób równoważny tezę.

Ponieważ obie strony danej nierówności $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$ są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu. Otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}\right)^2<\left(2^{26}\right)^2$$

$$2^{50}+1+2\cdot\sqrt{2^{50}+1}\cdot\sqrt{2^{50}-1}+2^{50}-1<2^{52}$$

$$2\cdot 2^{50}+2\sqrt{\left(2^{50}-1\right)\left(2^{50}+1\right)}<2^{52}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1}<2^{52}-2^{51}$$

$$\sqrt{2^{100}-1}<2^{50}.$$

Obie strony tej nierówności są także dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy

$$2^{100}-1<2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a więc dana w zadaniu nierówność jest również prawdziwa, co kończy dowód.

### Rozwiązanie II

Oznaczmy $a=\sqrt{2^{50}+1},\quad b=\sqrt{2^{50}-1}$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb *a, b*, takich, że $a\neq b,$ mamy $\left(a-b\right)^2>0$, skąd $a^2+b^2>2ab$. Więc

$\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(2^{50}+1+2^{50}-1\right)=2^{52}.$

Stąd $a+b<\sqrt{2^{52}}=2^{26}$, co kończy dowód.

## Zadanie 44. (0–5)

W roku 2015 na uroczystości urodzinowej Marka ktoś spytał go, ile ma lat. Marek odpowiedział: jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez wiek, który będę miał za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma Marek.

### Wymagania ogólne

*III. Modelowanie matematyczne.*
*Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.*

### Wymagania szczegółowe

*3.4. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.*

### Rozwiązanie

Oznaczamy przez $x$ obecny wiek Marka (w latach). Wówczas wiek Marka sprzed 27 lat jest równy $x-27$, wiek jaki będzie miał za 15 lat jest równy $x+15$, a rok jego urodzenia to $2015-x$.

Mamy więc równanie $(x-27)(x+15)=2015-x$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy $x^2-11x-2420=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby $x=55$, $x=-44$.

Stąd wiemy, że Marek w roku 2015 ma 55 lat.

## 6.5. PRZYKŁADOWE ZADANIA Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM DLA ABSOLWENTÓW NIESŁYSZĄCYCH WRAZ Z ROZWIĄZANIAMI

Numeracja zadań w części 6.5. odpowiada numeracji zadań w części 5. Jeżeli zadanie nie zostało przedstawione poniżej, oznacza to, że wersja dla niesłyszących nie różni się niczym od wersji przedstawionej w części 5.

### Zadanie 11. (0–2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $(a_n)$ o wyrazach dodatnich taki, że $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

**Wymagania ogólne**

*II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.*

*Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.*

**Wymagania szczegółowe**

*5.3.R Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.*

**Rozwiązanie**

Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $a_1 = \frac{3}{4}$, a trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = \frac{1}{3}$.

Ponieważ, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, stąd $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4}{9}$. Zatem $q = -\frac{2}{3}$ lub $q = \frac{2}{3}$. Wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q = \frac{2}{3}$. Ponieważ $|q| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$, więc

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{4}.$$

Suma $S$ wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $(a_n)$ o wyrazach dodatnich jest równa: $S = \frac{9}{4}$.

## Zadanie 13. (0–3)

Dana jest funkcja $f$ określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta $l$ o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji $f$.

**Wymagania ogólne**

*V. Rozumowanie i argumentacja.*

*Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.*

**Wymagania szczegółowe**

*11.3.R Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.*

**Rozwiązanie**

Zapisujemy równanie prostej $l$ w postaci kierunkowej $y=10x+9$.

Wyznaczamy pochodną funkcji $f$: $f'(x)=12x^2-2$.

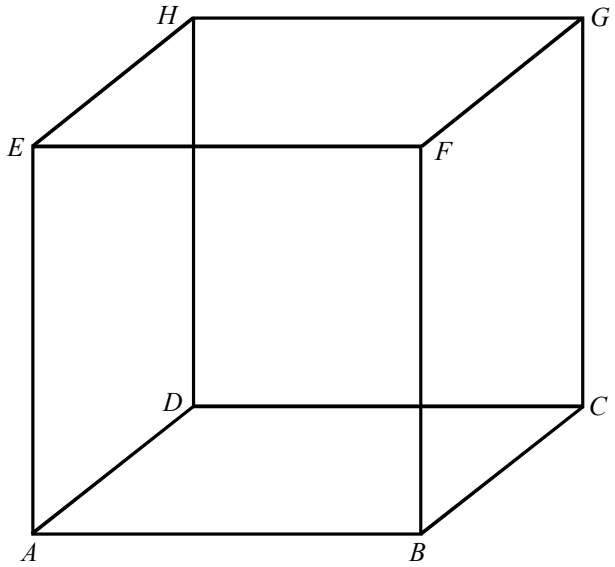
Zauważamy, że dla $x=-1$ oraz dla $x=1$ pochodna funkcji $f$ jest równa $10$ i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej $l$.

Obliczamy wartość funkcji $f$ w punkcie $x=-1$: $f(-1)=-1$ oraz w punkcie $x=1$: $f(1)=3$.

Punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ leży na prostej $l$, natomiast punkt o współrzędnych $(1,3)$ nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji $f$, co kończy dowód.

## Zadanie 28. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej $1$. Punkt $S$ jest środkiem krawędzi $DH$. Odcinek $DW$ jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ poprowadzoną z wierzchołka $D$ na ścianę $ACS$. Oblicz długości odcinków $AW$, $CW$ i $SW$.




**Wymaganie ogólne**

*IV. Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

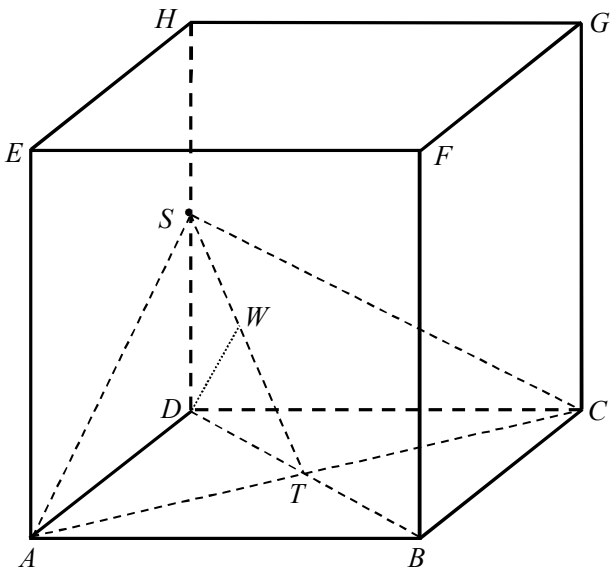
**Wymagania szczegółowe**

*9.2. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.*

*10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.*

**Rozwiązanie**

Łączymy punkty $A$ i $S$, $A$ i $C$ oraz $C$ i $S$ (zobacz rysunek). Niech $T$ oznacza punkt przecięcia przekątnych $AC$ i $BD$ podstawy tego sześcianu.




Punkt $S$ leży na krawędzi $DH$, więc $AS=CS$, a zatem trójkąt $ACS$, który jest podstawą ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek $ST$ jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka $ST$ obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego $TSD$:

$$|ST|^2=|SD|^2+|DT|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ czyli } |ST|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważamy, że odcinek $DW$ jest wysokością trójkąta prostokątnego $TDS$ poprowadzoną do przeciwprostokątnej $TS$. Długość odcinka $DW$ obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta $TDS$:

$$\frac{1}{2}\cdot|SD|\cdot|TD|=\frac{1}{2}\cdot|ST|\cdot|DW|,$$

$$|DW|=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego $SWD$ wynika, że:

$$|SW|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Teraz zauważamy, że wysokość $ST$ trójkąta równoramiennego $ACS$ jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW=CW$. Długość odcinka $AW$ obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego $ATW$, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymujemy zatem

$$|AW|^2 = |AT|^2 + |TW|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{6},$$

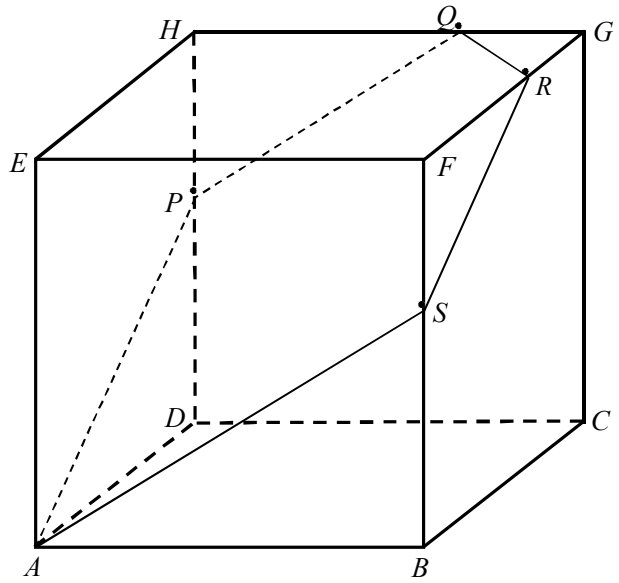
skąd

$$|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $|SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

## Zadanie 30. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość $15$. Punkty $Q$ i $R$ dzielą krawędzie $HG$ i $FG$ w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna $AQR$ przecina krawędź $DH$ w punkcie $P$, a krawędź $BF$ w punkcie $S$. Oblicz długości odcinków $DP$ i $BS$.




**Wymaganie ogólne**

*IV. Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.*

**Wymagania szczegółowe**

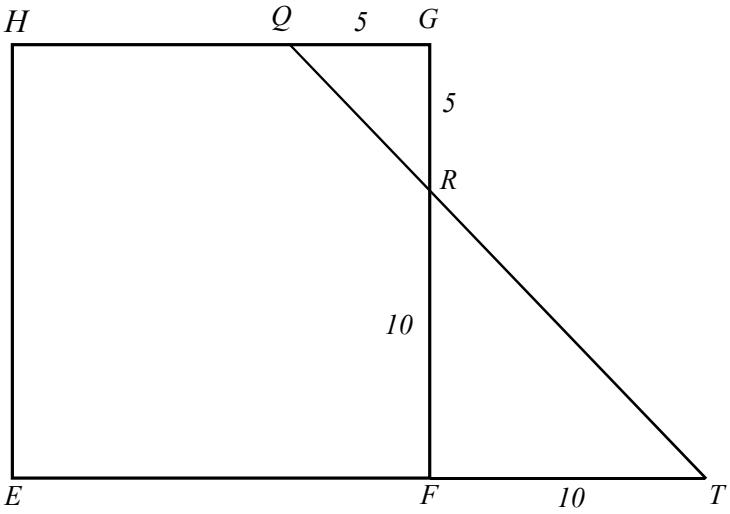
*9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.*

*9.1. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), oblicza miary tych kątów.*

*7.4.R Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.*

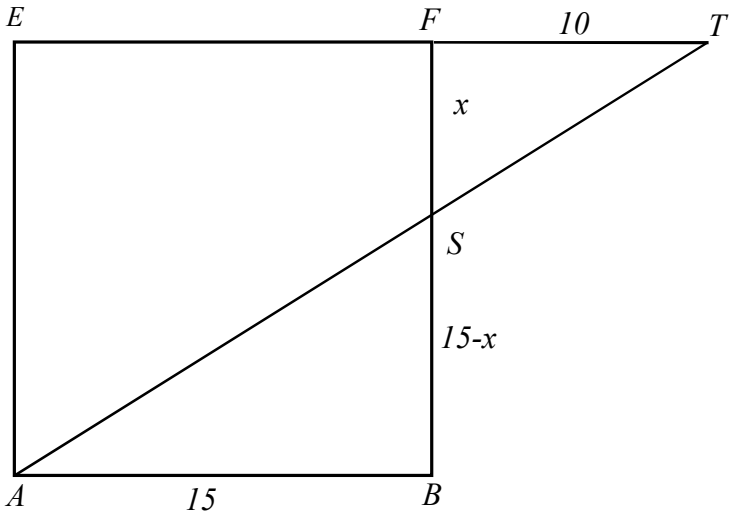
**Rozwiązanie (I sposób)**

Rozważamy kwadrat $EFGH$. Niech $T$ oznacza punkt przecięcia przedłużeń odcinków $QR$ i $EF$ (zobacz rysunek).




Trójkąty prostokątne $RFT$ i $RGQ$ są podobne na mocy cechy *kkk*. Stąd wynika, że $|FT| = 10$.

Teraz rozważamy kwadrat $ABFE$ (zobacz rysunek).




Trójkąty prostokątne $ABS$ i $TFS$ są podobne na mocy cechy *kkk*. Możemy więc zapisać równanie

$$\frac{|SF|}{|FT|}=\frac{|BS|}{|AB|}, \text{ a zatem } \frac{x}{10}=\frac{15-x}{15}.$$

Rozwiązujemy to równanie

$$15x=150-10x,$$

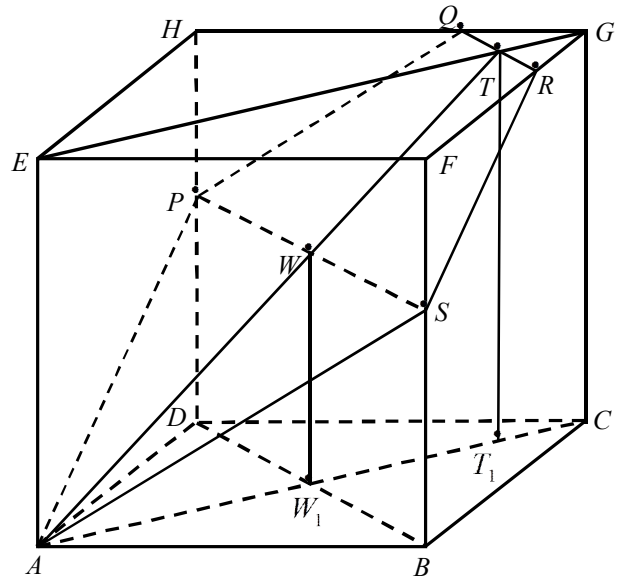
$$25x=150,$$

$$x=6.$$

Zatem długość szukanego odcinka $BS$ jest równa $9$. Ponieważ punkty $B$ i $D$ leżą symetrycznie względem płaszczyzny $ACGE$, więc $|DP|=|BS|=9$.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Rysujemy przekątne $AC$, $BD$, $EG$ oraz łączymy punkty $P$ i $S$. Oznaczmy kolejno: $W$ – środek odcinka $PS$, $W_1$ – punkt przecięcia przekątnych $AC$ i $BD$, $T$ – środek odcinka $QR$ (zobacz rysunek). Niech ponadto $T_1$ będzie takim punktem przekątnej $AC$, że $GT=CT_1$.




Zauważamy, że $DP = BS$ co wynika, z symetrii względem płaszczyzny $ACGE$. Zatem czworokąt $BSPD$ jest prostokątem. Stąd wynika, że prosta przechodząca przez środki boków tego prostokąta – punkty $W$ i $W_1$ – jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Ponadto, prosta przechodząca przez punkty $T$ i $T_1$ jest także prostopadła do tej płaszczyzny. Zauważamy, że punkty: $A$, $W$, $W_1$, $T$ i $T_1$ leżą w jednej płaszczyźnie — jest nią płaszczyzna $ACGE$. Na mocy cechy *kkk*, trójkąty prostokątne $AW_1W$ i $AT_1T$ są podobne, więc możemy zapisać równość

$$\frac{|TT_1|}{|AT_1|} = \frac{|WW_1|}{|AW_1|}, \text{ skąd wynika, że } |WW_1| = \frac{|TT_1| \cdot |AW_1|}{|AT_1|}.$$

Ponieważ $|TT_1| = 15$, $|AW_1| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ oraz $|AT_1| = 15\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$, więc

$$|WW_1| = \frac{15 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2}}{\frac{25\sqrt{2}}{2}} = 9.$$

Oczywiście $|DP| = |BS| = |WW_1| = 9$.

## Zadanie 31. (0–3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie ma zera i na dokładnie dwóch miejscach są cyfry parzyste.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.

- Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$. Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Mamy zatem

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 5!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=3\cdot 7=21.$$

- Możemy wszystkie te sposoby wyboru dwóch miejsc wypisać (kółko białe oznacza miejsce dla cyfry nieparzystej, kółko czarne — dla parzystej):

1: ● ● ○ ○ ○ ○ ○

2: ● ○ ● ○ ○ ○ ○

3: ● ○ ○ ● ○ ○ ○

4: ● ○ ○ ○ ● ○ ○

5: ● ○ ○ ○ ○ ● ○

6: ● ○ ○ ○ ○ ○ ●

7: ○ ● ● ○ ○ ○ ○

8: ○ ● ○ ● ○ ○ ○

9: ○ ● ○ ○ ● ○ ○

10: ○ ● ○ ○ ○ ● ○

11: ○ ● ○ ○ ○ ○ ●

12: ○ ○ ● ● ○ ○ ○

13: ○ ○ ● ○ ● ○ ○

14: ○ ○ ● ○ ○ ● ○

15: ○ ○ ● ○ ○ ○ ●

16: ○ ○ ○ ● ● ○ ○

17: ○ ○ ○ ● ○ ● ○

18: ○ ○ ○ ● ○ ○ ●

19: ○ ○ ○ ○ ● ● ○

20: ○ ○ ○ ○ ● ○ ●

21: ○ ○ ○ ○ ○ ● ●

- Możemy także te możliwości zliczać: jeśli pierwsza (licząc od lewej strony) cyfra parzysta stoi na pierwszym miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (od drugiego do siódmego); jeśli pierwsza (od lewej strony) cyfra parzysta stoi na drugim miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z pięciu miejsc i tak dalej. Wreszcie, jeśli pierwsza cyfra parzysta stoi na szóstym miejscu, to druga może stać tylko na miejscu siódmym. Łącznie mamy więc

$$6+5+4+3+2+1=21$$

  sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych.

- Możemy wreszcie rozumować następująco: jedną cyfrę parzystą możemy ustawić na jednym z 7 miejsc, drugą na jednym z sześciu miejsc. W ten sposób każde ustawienie policzyliśmy dwa razy, np. ustawienie

○ ○ ● ○ ● ○ ○

możemy otrzymać wybierając najpierw miejsce trzecie, a potem miejsce piąte lub wybierając najpierw miejsce piąte, a potem miejsce trzecie. Zatem liczba sposobów wyboru tych dwóch miejsc jest równa

$$\frac{7\cdot 6}{2} = 7\cdot 3 = 21.$$

Obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwa razy z reguły mnożenia. Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie ma zera, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: 2, 4, 6, 8. Mamy zatem $4^2 = 16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Mamy zatem $5^5 = 3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostałych miejscach.

Obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy

$$21\cdot 4^2\cdot 5^5 = 21\cdot 16\cdot 3125 = 1050000$$

liczb.

## Zadanie 32. (0–4)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3. Cyfry mogą się powtarzać.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najprostszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:

$$111 + 112 + 113 + 121 + 122 + 123 + 131 + 132 + 133 = 1098,$$

$$211 + 212 + 213 + 221 + 222 + 223 + 231 + 232 + 233 = 1998,$$

$$311 + 312 + 313 + 321 + 322 + 323 + 331 + 332 + 333 = 2898.$$

Suma wszystkich liczb jest równa

$$1098 + 1998 + 2898 = 5994.$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9 \cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 900 + 198 = 1098,$$

$$9 \cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 1800 + 198 = 1998,$$

$$9 \cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 2700 + 198 = 2898.$$

Dodawanie

$$11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33 = 198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Ta obserwacja będzie podstawą dla drugiego sposobu rozwiązania.

Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100. Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dadzą sumę

$$9 \cdot 100 + 9 \cdot 200 + 9 \cdot 300 = 9 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 100 \cdot 6 = 5400.$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dadzą sumę

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + 9 \cdot 30 = 9 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 10 \cdot 6 = 540.$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 9 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 6 = 54.$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem

$$5400 + 540 + 54 = 5994.$$

## Zadanie 33. (0–7)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

### Wymagania ogólne

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*

### Wymagania szczegółowe

*10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.*

### Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Mamy więc pięć możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24 (możliwości te parami wykluczają się):

1. Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8 \cdot \binom{7}{3} = 280$ — wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki

   albo tak:

   - $\binom{8}{4} \cdot 4 = 280$ — wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = 280$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.

2. Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ — wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa

   albo tak:

   - $\binom{8}{3} \cdot 3! = 336$ — wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,

   albo tak:

- $\frac{8!}{5!}=336$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111.

3. Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek $(24=3\cdot 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.

   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8\cdot 7=56$ — wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki

   albo tak:

   - $\binom{8}{2}\cdot 2=56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{6!}=56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111.

4. Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek $(24=6\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.

   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8\cdot 7=56$ — wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki

   albo tak:

   - $\binom{8}{2}\cdot 2=56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{6!}=56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111.

5. Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek$(24=6\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.
   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8\cdot\binom{7}{2}=168$ — wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek

   albo tak:

   - $\binom{8}{3}\cdot 3=168$ — wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{2!\cdot 5!}=168$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111.

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest

$$280+336+56+56+168=896.$$

## Zadanie 35. (0–3)

Losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

**Wymagania ogólne**

*IV. Użycie i tworzenie strategii.*

**Wymagania szczegółowe**

*10.2.R Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.*

**Rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia:

$A$ — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8,

$B$ — suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Mamy obliczyć $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu $B$ sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej,

$|B|=7\cdot 6=42$,

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej,

$|A\cap B|=1\cdot 7=7$,

stąd

$$P(A\,|\,B)=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\dfrac{1}{6}$.

## Opinia Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich o informatorach maturalnych od 2015 roku

Konferencja Rektorów Akademickich Szkół Polskich z wielką satysfakcją odnotowuje konsekwentne dążenie systemu oświaty do poprawy jakości wykształcenia absolwentów szkół średnich. Konferencja z uwagą obserwuje kolejne działania Ministerstwa Edukacji Narodowej w tym zakresie, zdając sobie sprawę, że od skuteczności tych działań w dużym stopniu zależą także efekty kształcenia osiągane w systemie szkolnictwa wyższego. W szczególności dotyczy to kwestii właściwego przygotowania młodzieży do studiów realizowanych z uwzględnieniem nowych form prowadzenia procesu kształcenia.

Podobnie jak w przeszłości, Konferencja konsekwentnie wspiera wszystkie działania zmierzające do tego, by na uczelnie trafiali coraz lepiej przygotowani kandydaci na studia. Temu celowi służyła w szczególności pozytywna opinia Komisji Edukacji KRASP z 2008 roku w sprawie nowej podstawy programowej oraz uchwała Zgromadzenia Plenarnego KRASP z dn. 6 maja 2011 r. w sprawie nowych zasad egzaminu maturalnego.

Z satysfakcją dostrzegamy, że ważne zmiany w egzaminie maturalnym, postulowane w cytowanej wyżej uchwale zostały praktycznie wdrożone przez MEN poprzez zmianę odpowiednich rozporządzeń.

Przedłożone do zaopiniowania informatory o egzaminach maturalnych opisują formę poszczególnych egzaminów maturalnych, przeprowadzanych na podstawie wymagań określonych w nowej podstawie programowej, a także ilustrują te wymagania wieloma przykładowymi zadaniami egzaminacyjnymi.

Po zapoznaniu się z przedłożonymi materiałami, KRASP z satysfakcją odnotowuje:

***w zakresie języka polskiego:***

- wzmocnienie roli umiejętności komunikacyjnych poprzez odejście od prezentacji na egzaminie ustnym i zastąpienie jej egzaminem ustnym, na którym zdający będzie musiał ad hoc przygotować samodzielną wypowiedź argumentacyjną,
- rezygnację z klucza w ocenianiu wypowiedzi pisemnych,
- zwiększenie roli tekstów teoretycznoliterackich i historycznoliterackich na maturze rozszerzonej;

***w zakresie historii:***

- kompleksowe sprawdzanie umiejętności z zakresu chronologii historycznej, analizy i interpretacji historycznej oraz tworzenia narracji historycznej za pomocą rozbudowanej wypowiedzi pisemnej na jeden z zaproponowanych tematów, łącznie pokrywających wszystkie epoki oraz obszary historii;

***w zakresie wiedzy o społeczeństwie:***

- położenie silniejszego akcentu na sprawdzanie umiejętności złożonych (interpretowanie informacji, dostrzeganie związków przyczynowo-skutkowych) w oparciu o poszerzony zasób materiałów źródłowych: teksty (prawne, naukowe, publicystyczne), materiały statystyczne, mapy, rysunki itp.

***w zakresie matematyki:***

- istotne zwiększenie wymagań na poziomie rozszerzonym poprzez włączenie zadań z rachunku różniczkowego i pojęć zaawansowanej matematyki,
- istotne poszerzenie wymagań z zakresu kombinatoryki oraz teorii prawdopodobieństwa;

***w zakresie biologii oraz chemii:***

- zwiększenie znaczenia umiejętności wyjaśniania procesów i zjawisk biologicznych i chemicznych,
- mierzenie umiejętności analizy eksperymentu – sposobu jego planowania, przeprowadzania, stawianych hipotez i wniosków formułowanych na podstawie dołączonych wyników;

***w zakresie fizyki:***

- zwiększenie znaczenia rozumienia istoty zjawisk oraz tworzenie formuł matematycznych łączących kilka zjawisk,
- mierzenie umiejętności planowania i opisu wykonania prostych doświadczeń, a także umiejętności analizy wyników wraz z uwzględnieniem niepewności pomiarowych;

***w zakresie geografii:***

- uwzględnienie interdyscyplinarności tej nauki poprzez sprawdzanie umiejętności integrowania wiedzy z nauk przyrodniczych do analizy zjawisk i procesów zachodzących w środowisku geograficznym,
- znaczne wzbogacenie zasobu materiałów źródłowych (mapy, wykresy, tabele statystyczne, teksty źródłowe, barwne zdjęcia, w tym lotnicze i satelitarne), także w postaci barwnej.

Konferencja Rektorów Akademickich Szkół Polskich z zadowoleniem przyjmuje też informację o wprowadzeniu na świadectwach maturalnych od 2015 roku dodatkowej formy przedstawiania wyniku uzyskanego przez zdającego w postaci jego pozycji na skali centylowej, tj. określenie, jaki odsetek zdających uzyskał taki sam lub słabszy wynik od posiadacza świadectwa. Wprowadzenie tej dodatkowej skali uwolni szkoły wyższe od dotychczasowego dylematu odnoszenia do siebie surowych wyników kandydatów na studia rekrutowanych na podstawie wyników egzaminów maturalnych o istotnie różnym poziomie trudności – rekrutacja stanie się prostsza i bardziej obiektywna.

Reasumując, w opinii Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich zaprezentowana w przedłożonych informatorach forma matury istotnie przyczyni się do tego, że młodzież przekraczająca progi uczelni będzie lepiej przygotowana do podjęcia studiów wyższych.

5 lipca 2013 r.

Przewodniczący KRASP

*prof. zw. dr hab. Wiesław Banyś*