Zadanie 1. (3 pkt)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x różnej od 1 oraz dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y różnej od 1 prawdziwa jest nierówność

$$\log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right).$$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy ze wzoru na zmianę podstaw logarytmu oraz z zależności $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$L = \log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\log_y(xy)}{\log_y x} \cdot \frac{\log_x\left(\frac{y}{x}\right)}{\log_x y} = \frac{\log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{1}{\cancel{\log_x y}} \cdot \cancel{\log_x y}} = \log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right) = P$$