



Zadanie 15. (6 pkt)

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a , b i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

ROZWIĄZANIE:

$$1 + a + b + c = 0$$

$$x_1 = p$$

$$x_2 = p + 3$$

$$x_3 = p + 6$$

Zapisujemy $W(x)$ w postaci iloczynowej:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - p)(x - p - 3)(x - p - 6) = \\ &= (x - p)(x^2 - xp - 6x - px + p^2 + 6p - 3x + 3p + 18) = (x - p)(x^2 - 2px - 9x + p^2 + 9p + 18) = \\ &= x^3 - 2px^2 - 9x^2 + p^2x + 9px + 18x - px^2 + 2p^2x + 9px - p^3 - 9p^2 - 18p = \\ &= x^3 + (-3p - 9)x^2 + (3p^2 + 18p + 18)x - p^3 - 9p^2 - 18p \end{aligned}$$

$$a = -3p - 9$$

$$b = 3p^2 + 18p + 18$$

$$c = -p^3 - 9p^2 - 18p$$

$1 + a + b + c = 0$ więc

$$1 - 3p - 9 + 3p^2 + 18p + 18 - p^3 - 9p^2 - 18p = 0$$

$$\underbrace{-p^3 - 6p^2 - 3p + 10}_{G(p)} = 0$$

$$G(1) = -1 - 6 - 3 + 10 = 0$$

czyli $G(p)$ dzieli się przez $p - 1$



ODPOWIEDZI

opracowanie:

JAK ZDAĆ MATURE
Z MATEMATYKI?

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

patron:



$$\begin{array}{r} -p^2 - 7p - 10 \\ \hline -p^3 - 6p^2 - 3p + 10 \quad : p - 1 \\ p^3 - p^2 \\ \hline -7p^2 - 3p \\ 7p^2 - 7p \\ \hline -10p + 10 \\ 10p - 10 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$(p - 1)(-p^2 - 7p - 10) = 0$$

$$p_1 = 1 \quad \Delta = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$p_{2,3} = \frac{7 \pm 3}{-2} = \begin{matrix} \nearrow^{-5} \\ \searrow_{-2} \end{matrix}$$

I przypadek dla $p = 1$

$$a = -3 \cdot 1 - 9 = -12$$

$$b = 3 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 18 = 39$$

$$c = -1^3 - 9 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 = -28$$

II przypadek dla $p = -2$

$$a = -3 \cdot (-2) - 9 = 6 - 9 = -3$$

$$b = 3 \cdot (-2)^2 + 18 \cdot (-2) + 18 = 12 - 36 + 18 = -6$$

$$c = -(-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2 - 18 \cdot (-2) = 8 - 36 + 36 = 8$$

III przypadek dla $p = -5$

$$a = -3 \cdot (-5) - 9 = 6$$

$$b = 3 \cdot (-5)^2 + 18 \cdot (-5) + 18 = 75 - 90 + 18 = 3$$

$$c = -(-5)^3 - 9 \cdot (-5)^2 - 18 \cdot (-5) = 125 - 225 + 90 = -10$$

$$\text{Odp. } \begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \\ c = -28 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases}$$