Zadanie 12. (4 pkt)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

ROZWIĄZANIE:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$f'(x_0) = 4$ więc $3x_0^2 - 4x_0 = 4$

$$3x_0^2 - 4x_0 - 4 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_{0_{1,2}} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow 2 \\ \searrow -\frac{2}{3} \end{cases}$$

I przypadek

$$y_0 = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1 =$$

$$= -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{-8 - 24 + 27}{27} = -\frac{5}{27}$$

Wyznaczamy styczną:

$$y + \frac{5}{27} = 4\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$y + \frac{5}{27} = 4x + \frac{8}{3}$$

$$y = 4x + \frac{72}{27} - \frac{5}{27}$$

$$\underline{y = 4x + \frac{67}{27}}$$

II przypadek

$$y_0 = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$$

Wyznaczamy styczną:

$$y - 1 = 4(x - 2)$$

$$y - 1 = 4x - 8$$

$$\underline{y = 4x - 7}$$