

Zadanie 12. (4 pkt)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f , które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

ROZWIĄZANIE:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x_0) = 4 \quad \text{więc} \quad 3x_0^2 - 4x_0 = 4$$

$$3x_0^2 - 4x_0 - 4 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_{0,2} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{matrix} \nearrow^2 \\ \searrow_{-\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

I przypadek

$$\begin{aligned} y_0 &= f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \\ &= -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{-8 - 24 + 27}{27} = -\frac{5}{27} \end{aligned}$$

Wyznaczamy styczną:

$$\begin{aligned} y + \frac{5}{27} &= 4\left(x + \frac{2}{3}\right) \\ y + \frac{5}{27} &= 4x + \frac{8}{3} \\ y &= 4x + \frac{72}{27} - \frac{5}{27} \\ y &= 4x + \frac{67}{27} \end{aligned}$$

II przypadek

$$y_0 = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$$

Wyznaczamy styczną:

$$\begin{aligned} y - 1 &= 4(x - 2) \\ y - 1 &= 4x - 8 \\ y &= 4x - 7 \end{aligned}$$