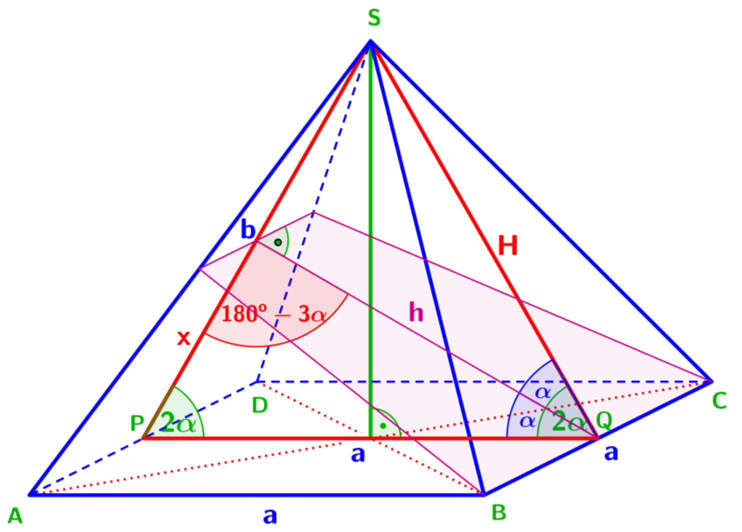
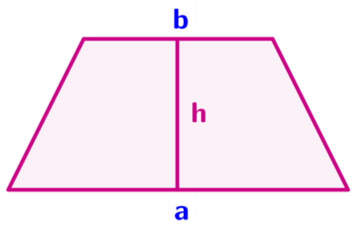
Zadanie 10. (6 pkt)

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem 2α. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i dzieli na połowy kąt pomiędzy ścianą boczną i podstawą. Oblicz pole powstałego przekroju tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE:



Polem przekroju jest trapez równoramienny:



Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{h}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(180° - 3\alpha)}$$

$$\frac{h}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin 3\alpha}$$

$$h = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$$

Obliczam H ściany bocznej:

$$\cos 2\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{H} \quad \rightarrow \quad H = \frac{a}{2\cos 2\alpha}$$

Obliczam odcinek x z tw. sinusów:

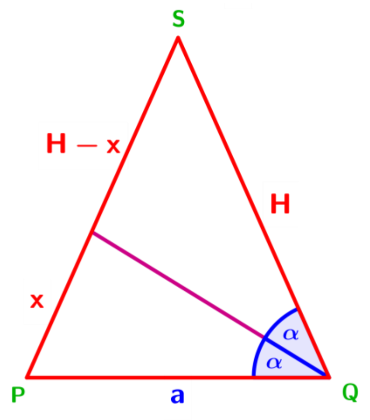
$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180° - 3\alpha)}$$

$$x\sin 3\alpha = a\sin\alpha$$

$$x = \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$$

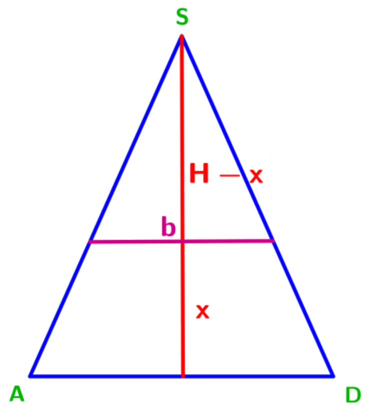
Z twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{x}{H - x} = \frac{a}{H}$$



Z podobieństwa trójkątów:

$$\frac{a}{H} = \frac{b}{H - x}$$



Wynika z tego, że:

$$\frac{x}{H - x} = \frac{b}{H - x} \quad \rightarrow \quad x = b = \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$$

$$P_{\text{przekroju}} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{\left(a + \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}}{2} = \frac{\frac{a\sin 3\alpha + a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}\cdot\frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}}{2} =$$

$$= \frac{a^2(\sin 3\alpha + \sin\alpha)\sin 2\alpha}{2\sin^2 3\alpha} = \frac{a^2\cdot 2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}\sin 2\alpha}{2\sin^2 3\alpha} =$$

$$= \frac{a^2\sin 2\alpha\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin^2 3\alpha} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$$

Odp. $P_{\text{przekroju}} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$