

Ponad 100 000 sprzedanych egzemplarzy

NOWE  
WYDANIE

# JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI ? NA POZIOMIE ROZSZERZONYM



dla bystrzaków  
i nie tylko!

PAKIET  
ON-LINE

710  
zadań

w tym 428 zadań rozwiązanych "krok po kroku"

matura

aktualna podstawa  
programowa

2019

2021

2020

2022

**Dariusz Kulma**

Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz  
odповідź



DARIUSZ KULMA

# JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM



*dla bystrzaków  
i nie tylko!*

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2018

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Druk i oprawa:

**Drukarnia "KOLUMB"**

ul. Kaliny 7

41-506 Kraków

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z [www.fotolia.com](http://www.fotolia.com): © Drobot Dean - id. 206995501; © ag visuell - id. 53584856;  
© Dreaming Andy - id. 62704436; © valdis torms - id. 46177828; © Marek - id. 68124775;  
© valdis torms - id. 66702797; © Denis Junker - id. 54171604; © Andrey\_Arkusha - id. 74798374;  
© dengess - id. 42780077; © Lovrencg - id. 51595955; © kharlamova\_lv - id. 47907680

Fotografie z [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com): PublicDomainPictures - id. animal-1717\_640;  
stux - id. origami-210114\_1280; blickpixel - id. cube-570703\_1920

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki

tel. 51-77777-51

e-mail: [elitmat@elitmat.pl](mailto:elitmat@elitmat.pl) , [www.elitmat.pl](http://www.elitmat.pl)

Mińsk Mazowiecki 2018. Wydanie czwarte.

ISBN: 978-83-63975-33-3

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy składać przez stronę:

**[www.jakzdacmaturezmatematyki.pl](http://www.jakzdacmaturezmatematyki.pl)**

bądź na adres: [elitmat@elitmat.pl](mailto:elitmat@elitmat.pl)



# ● WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać, aby wiedzieć dlaczego, co i jak powtarzać, żeby osiągnąć sukces na maturze!

## Drogi Maturzysto!

Jeśli zastanawiasz się nad zdawaniem egzaminu maturalnego z matury rozszerzonej z matematyki lub jesteś pewien, że będziesz zdawać ten egzamin, ale jeszcze nie wiesz, co będziesz studiować, to znaczy, że nie do końca masz sprecyzowany cel – gdzie podążać i za czym. I wiesz co? Wcale Ci się nie dziwię. Żyjemy w czasach o wyjątkowym dynamizmie. Jedyne, czego możesz być pewien w swoim życiu, to ZMIANA. I na tę zmianę warto się przygotować. Amerykański badacz przyszłości Thomas Fray mówi, że: „60% zawodów, w których ludzie będą pracować w ciągu najbliższych 10 lat, jeszcze nie powstało”. Badania mówią, że w ciągu 20 lat połowa istniejących teraz zawodów zniknie! Są również badania, które mówią o obecnych maturzystach (pokoleniu Z), którzy 17 razy w życiu zmieniają pracę! Powiesz sobie pewnie teraz: „skoro tak, to jaki sens jest w ogóle studiować, jeżeli nie wiem, co będę w życiu robić?”. A jednak da się wyraźnie zaobserwować pewne trendy i przygotować się właśnie na ciągłą ZMIANĘ. Większość dobrze płatnych zawodów związana jest z postępem technologicznym. To konsekwencja postępu – chcemy mieć lepsze urządzenia i maszyny, żyć łatwiej i wygodniej. Druga kategoria, to wszystko, co związane z szeroko pojętym zdrowiem i medycyną. Ludzie chcą być młodsi, zdrowsi, żyć dłużej. Jednak tu także wiele aspektów opiera się na technologicznym postępie i wiedzy. Tego obszaru również nie można pominąć.



Na prośbę „Rzeczpospolitej” eksperci firm rekrutacyjnych przygotowali listę 10 perspektywicznych zawodów i specjalizacji, w których warto się kształcić. Na miejscu 1 listy opublikowanej w lipcu 2018 znajduje się programista. Jednak warto zwrócić uwagę, że to nie tylko programowanie w Javie czy C++. Potrzebni będą specjaliści Virtual Reality, specjaliści od robotyki czy sztucznej inteligencji. Na 2 miejscu znalazł się specjalista do spraw cyberbezpieczeństwa (a więc dalej informatyk!). Popyt na tego typu usługi stale się zwiększa, szczególnie z powodu coraz większej ilości danych przechowywanych w chmurze, które muszą być dobrze chronione. Miejsce 3 – Data Scientist (badacz danych). IBM szacuje wzrost zapotrzebowania na tego typu specjalistów o 28%. Analitycy danych muszą wyłaniać z ogromnych zbiorów danych te elementy, które pozwolą na skuteczniejszy marketing, czy określanie nowych potrzeb klientów. Na kolejnych miejscach odpowiednio znalazły się takie zawody jak lekarz, fizjoterapeuta, opiekun osób starszych. Kolejne to: manager aktywności w sieci, a więc znowu zawód IT, program manager, vlogger oraz specjalista w zakresie odnawialnych źródeł energii i inżynier do spraw odpadów.

Nie wiem, czy któryś z tych zawodów będzie Twoim zawodem przyszłości, ale chciałbym, żebyś zobaczył trend, kierunek do którego zmierza rynek pracy na świecie i w Polsce. Do studiowania większości nowoczesnych kierunków potrzebna jest **matematyka**. I nie chodzi tylko o egzamin na poziomie rozszerzonym, ale w ogóle o fakt uczenia się matematyki. Matematyka to nauka logicznego myślenia, rozwijania umiejętności algorytmicznych, ale również rozwój kreatywności. **To taka swoista autostrada w Twoim rozwoju, która otwiera znacznie więcej furtek we współczesnych czasach niż inne dziedziny wiedzy.**

**Książka, którą trzymasz w ręku, jest wynikiem wielu moich doświadczeń i obserwacji.** Jak pewnie wiesz, matura z matematyki na poziomie rozszerzonym jest o wiele trudniejsza od tej z poziomu podstawowego. Abiturienti zauważają, że w odróżnieniu od matury na poziomie podstawowym nie ma na maturze rozszerzonej tak wielu „pewniaków”. Często spotykam się z pytaniami: „Na jakie zadania postawić? Czego uczyć się w pierwszej kolejności? Co będzie na pewno?”.

Na maturze rozszerzonej takich stuprocentowych pewniaków praktycznie nie ma. Jest jednak pewien kanon umiejętności, które mimo zmian podstawy programowej nadal będą pojawiały się w zadaniach maturalnych. Ta książka pomoże Ci opanować właśnie te najważniejsze umiejętności, byś mógł je skutecznie wykorzystać na maturze.

## Dlaczego nauka z tą książką jest skuteczniejsza i czym ta książka różni się od innych?

**Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym?” to specjalny system przygotowań, sprawdzający się na kursach i zajęciach, które prowadzę. To wynik ponad 20 lat pracy i gromadzenia**



doświadczeń, obserwacji dokonanych na dziesiątkach tysięcy lekcji, jakie przeprowadziłem. Dzięki temu systemowi przygotowanie jest bardzo skuteczne.

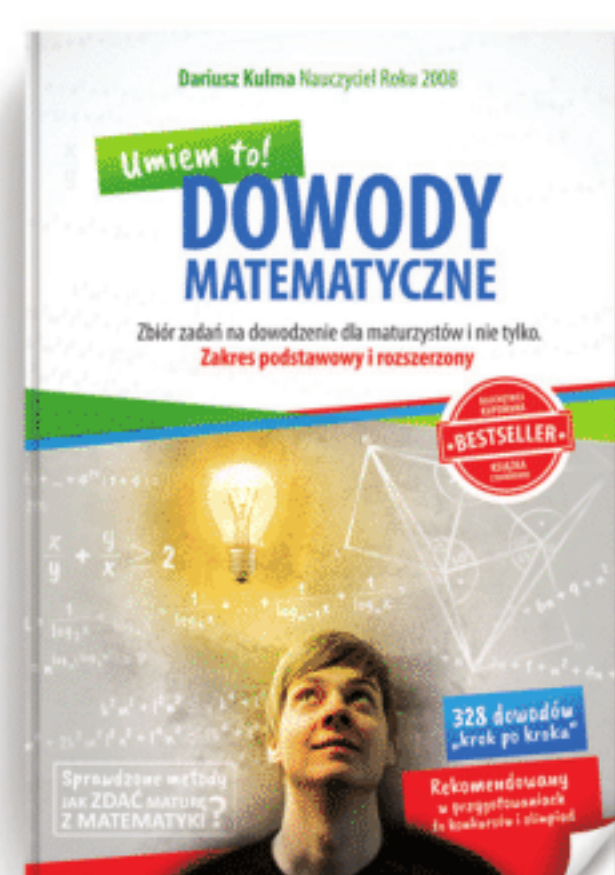
**Książka składa się z 11 działów i zawiera 428 zadań omówionych krok po kroku.** W każdym zadaniu zostały wyodrębnione poszczególne etapy i czynności, które musisz zrealizować. Zadania zostały ułożone parami. **Pierwsze (z numerem nieparzystym) jest zadaniem do analizy. Analizujesz to zadanie krok po kroku, obserwując, jak jest rozwiązywane. Drugie zadanie (z numerem parzystym) jest zadaniem sprawdzającym do samodzielnego wykonania.** Jest ono podobne do zadania pierwszego, nieraz jest prawie takie samo, a czasami tylko w jakimś stopniu do niego nawiązuje. Dzięki temu będziesz mógł samodzielnie wyćwiczyć nowe umiejętności i sprawdzić, czy już je opanowałeś. Pod koniec rozdziału możesz sprawdzić pełne rozwiązanie tego zadania, aby się przekonać, czy wszystko rozumiesz i wykonujesz poprawnie. **W żadnej innej książce zadania nie są ułożone w taki sposób. Twoja praca będzie niezwykle efektywna, a zadania, które samodzielnie wykonasz, utwierdzą Cię w przekonaniu, że jesteś na właściwej drodze.**

**Na początku każdego działu znajdziesz najważniejsze informacje i wzory.** Wiele wzorów czy zagadnień rozszerza treści tablic matematycznych i warto z nich korzystać. Często pozwolą Ci w szybszy sposób rozwiązać zadanie. Nigdy nie omijaj tej części. Zawsze przeglądaj wzory i przypominaj je sobie. Przy rozwiązywaniu określonego zadania zastanów się na przykład, które wzory już znasz, a których jeszcze nie wykorzystywałeś.

Nie wszystkie przedstawione tu zadania mogłyby znaleźć się na maturze, ale należało je uwzględnić, aby książka tworzyła spójną całość i byś mógł łatwiej zrozumieć dany materiał. Dlatego nie omijaj żadnych zadań. Wykonaj zarówno te, które wydają Ci się łatwe, jak i te, które sprawiają Ci trudność. **Wszystko możesz zrozumieć — bądź tylko konsekwentny w swoich przygotowaniach do matury.**

**Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych.** Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghaus'a i Tony'ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6–7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawią się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.** Podsumowania składają się z zadań testowych, kodowanych i zadań otwartych krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi. Ułożenie zadań przypomina rozbudowany arkusz maturalny. Łącznie są to 282 zadania maturalne, które sprawią, że będziesz miał coraz trwalej opanowane umiejętności. Co ważne, w podsumowaniach tych znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów — w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowaniu nr 5 z poprzednich pięciu. **Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury!** Przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz prawie zawsze wskazówki. Najczęściej będzie to numer zadania podobnego, a czasem tylko informacja, gdzie szukać wskazówki. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań, a nawet rozwiązania krok po kroku, gdy zadanie jest dowodem lub innym zadaniem na wykazywanie.

**I jeszcze jedno! Nie bój się dowodów.** Zadania tego typu uczą Cię uogólniać fakty matematyczne, są bardzo rozwijające i pobudzają Twoją kreatywność. Rozwiązuj jak najwięcej zadań tego typu. Jeszcze więcej dowodów znajdziesz w mojej innej książce **“Dowody matematyczne — zbiór zadań dla maturzystów i nie tylko”**. Jeśli będziesz chciał być mistrzem dowodów, to serdecznie polecam Ci tę książkę. Na końcowy trening przed maturą polecam Ci książkę **„Jak zdać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym – arkusze maturalne”**. Są to gotowe arkusze przypominające budowę zestawu egzaminacyjnego.



**Życzę Ci pracowitości i wytrwałości, bo bez nich nie ma złotych środków w przygotowaniach. Dzięki nim Twój sukces pojawi się niepostrzeżenie. I to większy, niż myślisz!**

**Powodzenia!**

*Dariusz Kulma*





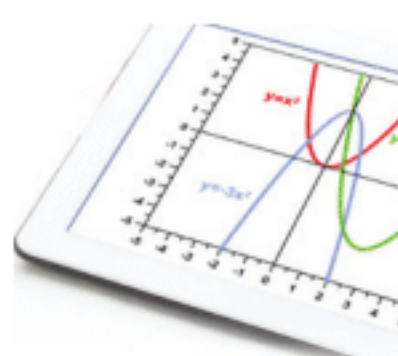
## 1 LICZBY RZECZYWISTE

Wstęp teoretyczny – Potęgi i pierwiastki	9
Zadania – działania na potęgach i pierwiastkach	10
Zadania – dowody z wykorzystaniem potęg i pierwiastków	13
Wstęp teoretyczny – Dowody dotyczące podzielności	15
Zadania – dowody dotyczące podzielności	16
Zadania – wykazywanie, że wyrażenie lub liczba spełnia określone warunki	20
Wstęp teoretyczny – Logarytmy	22
Zadania – logarytmy	23
Wstęp teoretyczny – Wartość bezwzględna, równania z jedną wartością bezwzględną, nierówności z jedną wartością bezwzględną	26
Zadania – działania z wykorzystaniem wartości bezwzględnej. Równania i nierówności z jedną wartością bezwzględną	27
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	29
<b>Podsumowanie 1</b>	37



## 2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Wstęp teoretyczny – Podstawowe wzory skróconego mnożenia, wzór Newtona i trójkąt Pascala	39
Zadania – wykorzystanie rozwinięcia wzoru $(a + b)^n$	40
Wstęp teoretyczny – Wykazywanie prawdziwości równań i nierówności	41
Zadania – wykazywanie prawdziwości równań i nierówności	42
Wstęp teoretyczny – Twierdzenia dotyczące wielomianów – twierdzenie Bézout, twierdzenie o pierwiastkach wymiernych, twierdzenie o reszcie	48
Zadania – zadania dotyczące wielomianów	49
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	59
<b>Podsumowanie 2</b>	67



## 3 FUNKCJE

Wstęp teoretyczny – Definicja i ogólne własności funkcji, przekształcenia wykresu funkcji, funkcja liniowa, funkcja kwadratowa	69
Zadania – przekształcenia wykresu funkcji	72
Wstęp teoretyczny – Funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna	75
Zadania – funkcja wykładnicza i logarytmiczna	76
Wstęp teoretyczny – Funkcja homograficzna	79
Zadania – funkcja homograficzna	80
Zadania – zadania optymalizacyjne z wykorzystaniem funkcji kwadratowej	84
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	89
<b>Podsumowanie 3</b>	97



## 4 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Wstęp teoretyczny – Rodzaje równań kwadratowych	99
Zadania – równania i nierówności wielomianowe oraz wymierne	100
Zadania – równania i nierówności z dwiema i więcej wartościami bezwzględnymi	104
Wstęp teoretyczny – Równania z parametrem ze wzorami Viète'a	109
Zadania – równania z parametrem ze wzorami Viète'a	110
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	121
<b>Podsumowanie 4</b>	133





## 5 CIĄGI

Wstęp teoretyczny – Definicja ciągu, monotoniczność ciągu, najważniejsze wzory i własności dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego	135
Zadania – ciąg arytmetyczny i geometryczny	136
Zadania – ciągi określone wzorem rekurencyjnym	138
Zadania – wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego	140
Wstęp teoretyczny – Szereg geometryczny	147
Zadania – szereg geometryczny	148
Wstęp teoretyczny – Granice ciągów	149
Zadania – granice ciągów	150
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	154
<b>Podsumowanie 5</b>	163



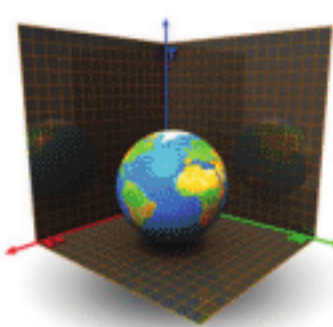
## 6 TRYGNOMETRIA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory i zależności dotyczące funkcji trygonometrycznych	165
Zadania – podstawowe własności oraz zależności między funkcjami trygonometrycznymi	167
Zadania – równania i nierówności trygonometryczne	174
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	183
<b>Podsumowanie 6</b>	191



## 7 PLANIMETRIA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory dotyczące figur geometrycznych, twierdzenia, cechy przystawania i podobieństwa trójkątów	193
Zadania – zadania geometryczne z wykorzystaniem podstawowych twierdzeń, m.in. Pitagorasa, sinusów, cosinusów, o okręgu wpisanym i opisanym	197
Zadania – dowody i zadania geometryczne z wykorzystaniem twierdzeń dotyczących m.in. kątów, okręgów, przystawania i podobieństwa trójkątów	206
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	218
<b>Podsumowanie 7</b>	229



## 8 GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA

Wstęp teoretyczny – Długość i środek odcinka, równanie prostej, odległość punktu od prostej, zastosowanie wektorów, przekształcenia w układzie współrzędnych, równanie okręgu w postaci kanonicznej	231
Zadania – zadania z wykorzystaniem podstawowych wzorów geometrii kartezjańskiej	233
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	248
<b>Podsumowanie 8</b>	255



## 9 STEREOMETRIA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory dotyczące graniastosłupów, ostrosłupów, brył obrotowych	257
Zadania – graniastosłupy	259
Zadania – ostrosłupy	267
Zadania – bryły obrotowe	276
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	282
<b>Podsumowanie 9</b>	295



## 10 STATYSTYKA, PRAWDOPODOBIEŃSTWO I KOMBINATORYKA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory i definicje dotyczące statystyki, rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki	297
Zadania – podstawowe wzory dotyczące kombinatoryki	299
Zadania – zastosowanie wzorów kombinatorycznych	300
Zadania – prawdopodobieństwo klasyczne	306
Wstęp teoretyczny – Prawdopodobieństwo warunkowe	312
Zadania – prawdopodobieństwo warunkowe	313



Wstęp teoretyczny – Prawdopodobieństwo całkowite	316
Zadania – prawdopodobieństwo całkowite	316
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	320
<b>Podsumowanie 10</b>	331

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x-1)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(-1)}{\sin(0)} = \frac{-\sin(1)}{0} = \frac{2}{3}$$

## 11 RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Wstęp teoretyczny – Granica funkcji	333
Zadania – granica funkcji	333
Wstęp teoretyczny – Definicja pochodnej funkcji w punkcie, równanie stycznej do wykresu funkcji, podstawowe wzory dotyczące pochodnych funkcji, zastosowanie rachunku pochodnych do wyznaczania przedziałów monotoniczności oraz ekstremów funkcji	335
Zadania – pochodne funkcji	337
Zadania – styczna do funkcji w punkcie	339
Zadania – monotoniczność i ekstrema lokalne funkcji	341
Zadania – zadania optymalizacyjne z wykorzystaniem rachunku pochodnych	342
<b>Rozwiązania zadań sprawdzających</b>	350
<b>Podsumowanie 11</b>	359
<b>Odpowiedzi do podsumowań 1-11</b>	361

**zadanie do analizy**

← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzami objaśniającymi poszczególne etapy rozwiązania.

**zadanie sprawdzające**

← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania.

**ROZWIĄZANIE**

← Pełne rozwiązanie zadania sprawdzającego, znajdujące się na końcu każdego działu.

**warto wiedzieć...**

← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań.

**wskazówka, uwaga!**

← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania.

**Podsumowanie**



← Podsumowujące zadania testowe oraz zadania otwarte (w tym kodowane) obejmujące zagadnienia z działu, po którym się znajdują oraz poprzednich. Np. Podsumowanie 6 zawiera zadania z trygonometrii oraz zagadnienia z poprzednich pięciu działów. Każde podsumowanie ma swój indywidualny kod QR przekierowujący do wersji on-line.

### UNIKALNY KOD DOSTĘPU

W każdej książce znajduje się unikalny kod uprawniający do skorzystania z pakietu on-line.

Wystarczy, że wpiszesz go na stronie i możesz skorzystać ze specjalnego modułu podsumowań, który sprawdzi Twoje odpowiedzi i obliczy liczbę zdobytych punktów.



Powyżej znajduje się kod zapewniający dostęp do PAKIETU ON-LINE w STREFIE MATURZYSTY. Wejdź do STREFY MATURZYSTY (poprzez kod QR lub wpisując adres [www.jakzdacmaturezmatematyki.pl/strefa\\_maturzysty](http://www.jakzdacmaturezmatematyki.pl/strefa_maturzysty) i korzystaj z dodatkowych pomocy on-line.



# 1

## Liczby rzeczywiste



### Potęgi i pierwiastki

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
POTĘGA	$\begin{cases} a^0 = 1 & \text{dla } a \neq 0 \\ a^1 = a & \text{dla } a \in \mathbb{R} \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} & \text{dla } a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$	$3^0 = 1, 15^0 = 1, (-3)^0 = 1$ $3^1 = 3, (-7)^1 = -7$ $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
PIERWIASTEK ST. DRUGIEGO	$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a,$ przy czym liczby $a$ i $b$ są nieujemne	$\sqrt{25} = 5,$ ponieważ $5^2 = 25$
PIERWIASTEK ST. TRZECIEGO	$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a,$ gdzie liczby $a$ i $b$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi	$\sqrt[3]{64} = 4,$ ponieważ $4^3 = 64$ $\sqrt[3]{-27} = -3,$ ponieważ $(-3)^3 = -27$

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	
$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2,$ $\frac{10^{30}}{10^{25}} = 10^{30-25} = 10^5$	$a \neq 0$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$	
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ lub $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$ $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$n \in \mathbb{C}, a \neq 0$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ potęga o wykładniku wymiernym dodatnim	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}_+$ oraz dla $n$ parzystego: $a \geq 0,$ dla $n$ nieparzystego: $a \in \mathbb{R}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ potęga o wykładniku wymiernym ujemnym	$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{1}{8}$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}_+$ oraz
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$		
$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$		

### NIEZBĘDNA TEORIA PRZEJRZYŚCIE WYJAŚNIONA

Na początku każdego działu znajdziesz niezbędną teorię, czyli najważniejsze wzory, twierdzenia i definicje.

Cała teoria oparta jest na konkretnych przykładach, pogrupowana, usystematyzowana i ułożona tak, by jak najłatwiej było Ci ją zrozumieć i zapamiętać.



ZADANIE 71

zadanie do analizy

3 pkt

maj 2015

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność  $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$ .

ROZWIĄZANIE

1° Rozkładamy lewą stronę nierówności tak, aby otrzymać

2° Zamieniamy wyrażenie  $-x^2$  na sumę  $-2x^2 + x^2$  oraz liczbę 3 na sumę  $1 + 1 + 1$ .

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + x^2 - 2x + 3 &= x^4 - 2x^2 + x^2 - 2x + 1 + 1 + 1 \\ &= (x^2 - 1)^2 - 2x + 3 \\ &= (x^2 - 1)^2 - 2x + 3 > 0 \end{aligned}$$

**UCZYSZ SIĘ TEGO, CO WYMAGANE I PRAWDOPODOBNE NA MATURZE**

W książce znajdują się zarówno zadania autorskie, jak i zadania z matur i propozycji Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, dzięki czemu uczysz się tego, co jest wymagane i najbardziej prawdopodobne na maturze.

3° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy sumę dwóch nieujemnych kwadratów oraz liczby 1, więc nierówność jest prawdziwa.

ZADANIE 72

zadanie sprawdzające

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  nierówność  $x^8 - x^4 + 4x^2 + 6 > 0$  jest prawdziwa.

ROZWIĄZANIE

**DOWODY I ZADANIA NA WYKAZYWANIE**

W książce znajdziesz wiele dowodów i zadań na wykazywanie. Jest to ten typ zadań, który sprawia uczniom z reguły największą trudność.

Ucząc się jednak zgodnie ze wskazówkami, będziesz w stanie opanować rozwiązywanie nawet takich zadań, które zawsze wydawały Ci się zbyt trudne.

Wszystkie zadania są dokładnie wytłumaczone, a dzięki kolejnym, podobnym zadaniom, które robisz samodzielnie, utrwalasz sobie sposób rozwiązywania.

ZADANIE 73

zadanie do analizy

Wykaż, że jeśli  $x, y, z$  są liczbami dodatnimi, to  $(x + y)(z + y)(x + z) \geq 8xyz$ .

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z zależności pomiędzy średnimi:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

2° Przedstawiamy każdą sumę  $a + b$  w postaci  $2 \cdot \frac{a+b}{2}$ .

3° Uzyskaliśmy trzy średnie arytmetyczne. Każda z nich jest większa bądź równa od średniej geometrycznej tych liczb.

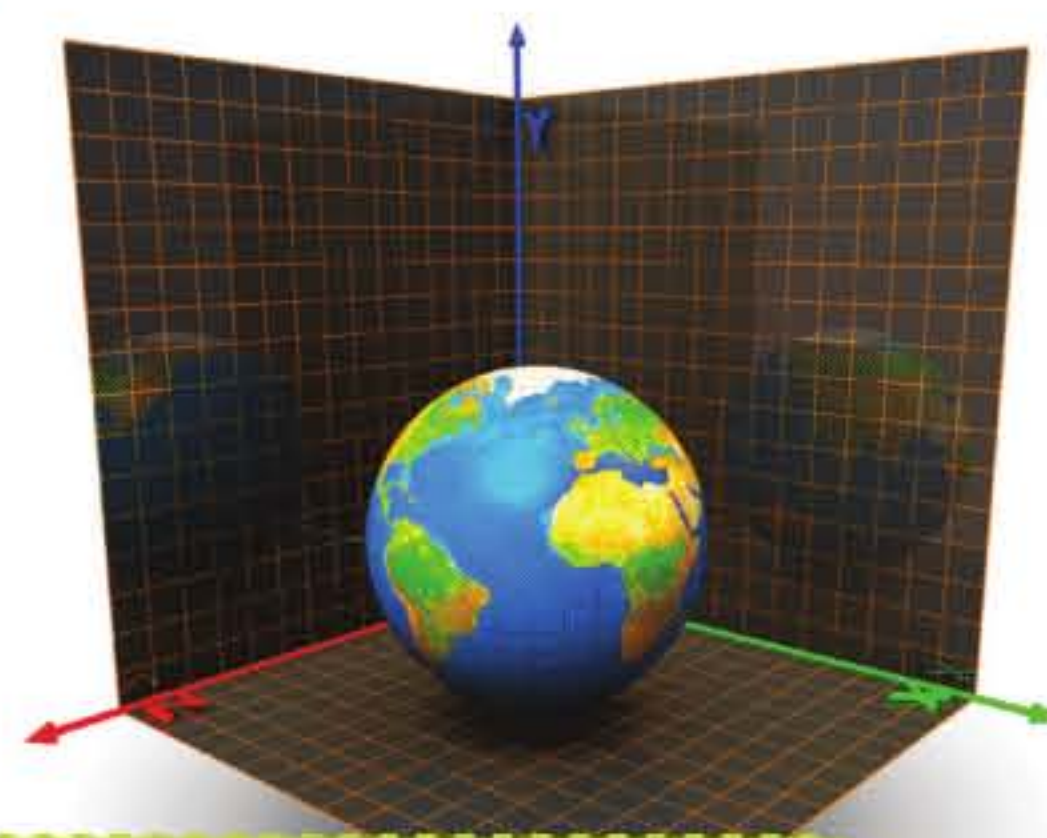
4° Porządkujemy wyrażenie, uzyskując prawą stronę nierówności.

$$L = (x + y)(z + y)(x + z) = 2 \cdot \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\geq \sqrt{xy}} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{z+y}{2}}_{\geq \sqrt{zy}} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{x+z}{2}}_{\geq \sqrt{xz}} \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{zy} \cdot 2\sqrt{xz} \geq 8\sqrt{x^2 y^2 z^2} \geq 8xyz = P$$









## ODPOWIEDZI DO WSZYSTKICH ZADAŃ WYJAŚNIONE „KROK PO KROKU”

Odpowiedzi do zadań ze wskazówkami i sprawdzających, które rozwiązywałeś samodzielnie, znajdziesz kilka stron dalej.

- Rozwiązania — zadania z geometrii kartezjańskiej

### ROZWIĄZANIE ZADANIA 286

#### ROZWIĄZANIE

- a.  $\vec{PQ} = [3 - (-1), 4 - 0] = [4, 4]$
- b.  $\vec{QR} = [2 - 3, -3 - 4] = [-1, -7]$
- c.  $\vec{PR} = [2 - (-1), -3 - 0] = [3, -3]$
- d. Wektor  $\vec{QP}$  jest wektorem przeciwnym do wektora  $\vec{PQ}$ , więc  $\vec{QP} = [-4, -4]$ , czyli  $\vec{PQ} + 2\vec{QP} = [4, 4] + 2[-4, -4] = [4, 4] + [-8, -8] = [-4, -4]$ .
- e.  $3\vec{PR} - \vec{QR} + 4\vec{PQ} = 3[3, -3] - [-1, -7] + 4[4, 4] = [9, -9] + [1, 7] + [16, 16] = [9 + 1 + 16, -9 + 7 + 16] = [26, 14]$

### ROZWIĄZANIE ZADANIA 288

#### ROZWIĄZANIE

1° Obliczamy długości wszystkich boków ze wzoru:  $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

$$|AB| = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$|BC| = \sqrt{(5 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$|CD| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$|AD| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

2° Wszystkie długości boków czworokąta wynoszą  $\sqrt{17}$ , więc czworokąt jest rombem o obwodzie  $4\sqrt{17}$ .

### ROZWIĄZANIE ZADANIA 290

#### ROZWIĄZANIE

1° Pole trójkąta zawarte jest między wektorami  $\vec{LK}$  i  $\vec{LM}$  (można również wybrać inną możliwość).

2° Obliczamy wektor  $\vec{LK}$ .

$$\vec{LK} = [x_K - x_L, y_K - y_L] = [-1 - 4, -2 - 1] = [-5, -3]$$

3° Obliczamy wektor  $\vec{LM}$ .

$$\vec{LM} = [x_M - x_L, y_M - y_L] = [3 - 4, 7 - 1] = [-1, 6]$$

4° Obliczamy pole trójkąta  $KLM$  ze wzoru:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |d(\vec{LK}, \vec{LM})|.$$

$$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-5 \cdot 6 - (-1) \cdot (-3)| = \frac{1}{2} |-30 - 3| = \frac{1}{2} |-33| = \frac{1}{2} \cdot 33 = 16\frac{1}{2} [j^2]$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: Pole trójkąta wynosi  $16\frac{1}{2} [j^2]$ .



# 8

## Podsumowanie



Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzednich działów. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

Możesz skorzystać ze wskazówki. To numer zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu. ↓

### GOTOWE POWTÓRKI PO KAŻDYM DZIALE

Po każdym dziale znajduje się podsumowanie, w którym są zarówno zadania z danego działu, jak i wszystkich poprzednich, dzięki czemu systematycznie powtarzasz i utrwalasz swoją wiedzę.

trapeza jest równoległobokiem.

A.  $12\sqrt{2} j^2$

B.  $24\sqrt{2} j^2$

ZAD. P.8.3 (0-1) Kąty w trójkącie prostokątnym są kolejno  $30^\circ$  i  $45^\circ$ . Jeden z boków ma długość  $a$ , można stwierdzić, że pole koła opisanego na tym trójkącie ma wartość:

A.  $a^2 \pi j^2$

B.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \pi j^2$

C.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{3} \pi j^2$

D.  $\frac{1}{2} a^2 \pi j^2$

zobacz zad. 256

ZAD. P.8.4 (0-1) Środek okręgu  $x^2 - 8x + y^2 + 4y = 25$  leży na prostej  $k$ , która jest symetralną odcinka  $AB$ , gdzie  $A(-5;3)$  i  $B(-1;7)$ . Prosta  $k$  ma wzór postaci:

A.  $y = 2x - 4$

B.  $y = x - 2$

C.  $y = -x + 4$

D.  $y = -x + 2$

zobacz zad. 293

ZAD. P.8.5 (0-1) Jeśli  $\sin x = a$  oraz  $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ , to  $\operatorname{tg} x$  ma wartość:

A.  $\frac{1-a^2}{a}$

B.  $\frac{a}{1-a^2}$

C.  $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

D.  $\frac{1-a}{a}$

zobacz inf. na s. 165

ZAD. P.8.6 (0-1) Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^5 + 2x^4 + 5x - 1$  przez  $x - 1$  jest:

A. równa 8,

B. liczbą parzystą,

C. większa od 10,

D. równa 7.

zobacz inf. na s. 48

ZAD. P.8.7 (0-1) Dane są trzy kolejne wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego  $2x + 4, 5x + 2, 3x + 12$ . Wtedy:

A.  $x = \frac{12}{5}$

B.  $x = -2\frac{2}{5}$

C.  $x = 2$

D.  $x = -\frac{22}{19}$

zobacz zad. 188

ZAD. P.8.8 (0-1) Miary kątów pięciokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy  $25^\circ$ . Największy kąt tego pięciokąta ma miarę:

A.  $58^\circ$

B.  $22^\circ$

C.  $97^\circ$

D.  $158^\circ$

zobacz zad. 256

ZAD. P.8.9 (0-1) Liczba  $\left(\frac{7}{35}\right)^{-\log_{25\sqrt{5}} 32}$  jest równa:

A. 5

B.  $\sqrt{5}$

C.  $\frac{2}{5}$

D. 4

zobacz zad. 43

ZAD. P.8.10 (0-1) Pole kwadratu wpisanego w ten kwadrat jest równe:

A.  $10\pi$

### W PRZYPADKU PROBLEMÓW - WSKAZÓWKI

Jeśli masz problem z rozwiązaniem któregoś z zadań, skorzystaj ze wskazówki, która wskaże Ci zadanie podobne lub potrzebny wzór.

$(\sqrt{2}; 3\sqrt{3})$ . Pole koła wpisanego w ten kwadrat jest równe:

D.  $25\pi$

zobacz zad. 288

ZAD. P.8.11 (0-1) Liczba  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  jest równa:

A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B.  $\frac{1}{5}$

C.  $\frac{5}{1}$

D. 4

zobacz zad. 291





# Odpowiedzi do podsumowań 1-11



## PODSUMOWANIE NR 1

P. 1.1 A   P. 1.2 B   P. 1.3 B   P. 1.4 A

P. 1.11 D   P. 1.12 C   P. 1.13 A   P. 1.14 C

P. 1.18   

1	1	0
---	---	---

   P. 1.19   

1	6
---	---

$$\begin{aligned}
 P. 1.20 \quad & 123 + 123^2 + 123^3 + 124^4 + \dots \\
 & = 123(1 + 123) + 123^3(1 + 123) + \dots \\
 & = 124(123 + 123^3 + \dots + 123^{17})
 \end{aligned}$$

### WSZYSTKO MOŻESZ SPRAWDZIĆ SAMODZIELNIE

Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań z podsumowań. W przypadku dowodów zamieściliśmy również pełne rozwiązania, żebyś mógł dokładnie przeanalizować sposób rozwiązania.

Wyrażenie jest więc podzielne przez 15 252.

$$P. 1.21 \quad \log_{125} 49 = \frac{\log_5 49}{\log_5 125} = \frac{\log_5 7^2}{3} = \frac{2 \log_5 7}{3} = \frac{2p}{3}$$

$$P. 1.22 \quad \sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}+\sqrt{3}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \notin \mathbb{C}$$

$$P. 1.23 \quad 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} = 2^n + 2 \cdot 2^n + 2^2 \cdot 2^n + 2^3 \cdot 2^n = 2^n + 2 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 2^n = 15 \cdot 2^n = 15 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 30 \cdot \underbrace{2^{n-1}}_{k \in \mathbb{C}} = 30k$$

Liczba jest więc podzielna przez 30.

$$P. 1.24 \quad 4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{60} = 4(1 + 4 + 4^2) + 4^4(1 + 4 + 4^2) + \dots + 4^{58}(1 + 4 + 4^2) = (1 + 4 + 16)(4 + 4^4 + \dots + 4^{58}) = 21 \cdot (4 + 4^4 + \dots + 4^{58}) = 7 \cdot \underbrace{3(4 + 4^4 + \dots + 4^{58})}_{k \in \mathbb{C}} = 7k$$

Liczba jest więc podzielna przez 7.

$$P. 1.25 \quad L = \log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{6 \log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \frac{6a}{1-a} = p$$

$$\begin{aligned}
 P. 1.26 \quad & L = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^9} b} + \frac{1}{\log_{a^{10}} b} = \\
 & = \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \dots + \log_b a^9 + \log_b a^{10} = \\
 & = \log_b a + 2 \log_b a + 3 \log_b a + \dots + 9 \log_b a + 10 \log_b a = 55 \log_b a = \frac{55}{\log_a b} = p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P. 1.27 \quad & k = 77^4 - 5 \cdot 77^2 + 4 \quad \text{Niech } t = 77^2, \text{ więc:} \\
 & k = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) = (77^2-1)(77^2-4) = (77-1)(77+1)(77-2)(77+2) = \\
 & = 76 \cdot 78 \cdot 75 \cdot 79 = 4 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 39 \cdot 75 \cdot 79 = 4 \cdot 2 \cdot 75 \cdot 19 \cdot 39 \cdot 79 = 600 \cdot \underbrace{19 \cdot 39 \cdot 79}_{l \in \mathbb{C}} = 600l
 \end{aligned}$$

Liczba jest więc podzielna przez 600.

## PODSUMOWANIE NR 2

P. 2.1 D   P. 2.2 C   P. 2.3 C   P. 2.4 B   P. 2.5 C   P. 2.6 B   P. 2.7 C   P. 2.8 A   P. 2.9 D   P. 2.10 D

P. 2.11 C   P. 2.12 C   P. 2.13 D   P. 2.14 B   P. 2.15 B   P. 2.16 A   P. 2.17.   

5	7	6
---	---	---

   P. 2.18.   

6	7	6
---	---	---

P. 2.19.   

1	1	6
---	---	---

   P. 2.20.   

3	2	4
---	---	---

$$\begin{aligned}
 P. 2.21 \quad & a = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots}}} \quad |^3 \\
 & a^3 = 6 + \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots}}}_a \\
 & a^3 = 6 + a
 \end{aligned}$$

$$a^3 - a - 6 = 0 \quad \text{Równanie to ma tylko jedno rozwiązanie: } a = 2 \in (\sqrt{2}, \pi).$$





Dodatkowe informacje, komentarze oraz errata  
dostępne na stronie: [jakzdacmaturezmatematyki.pl/errata](http://jakzdacmaturezmatematyki.pl/errata)

DLA MATURZYSTÓW POLECAMY POZOSTAŁE KSIĄŻKI Z SERII „JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI”  
AUTORSTWA DARIUSZA KULMY — NAUCZYCIELA ROKU 2008



REPETYTORIUM ŚCIŚLE POWIĄZANE JEST Z **ARKUSZAMI MATURALNYMI**  
"JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM?"

- ✓ **171 ZADAŃ.**
- ✓ Pełne rozwiązania do zadań sprawiających maturzystom największą trudność, np. dowodów.
- ✓ Zadania autorskie opracowane na podstawie oficjalnych arkuszy CKE.
- ✓ Odpowiedzi do wszystkich zadań.

REPETYTORIUM ORAZ ARKUSZE MATURALNE NA POZIOMIE PODSTAWOWYM Z SERII "JAK ZDAĆ  
MATURE Z MATEMATYKI?" TO **POMOC SPRAWDZONA PRZEZ TYSIĄCE MATURZYSTÓW!**

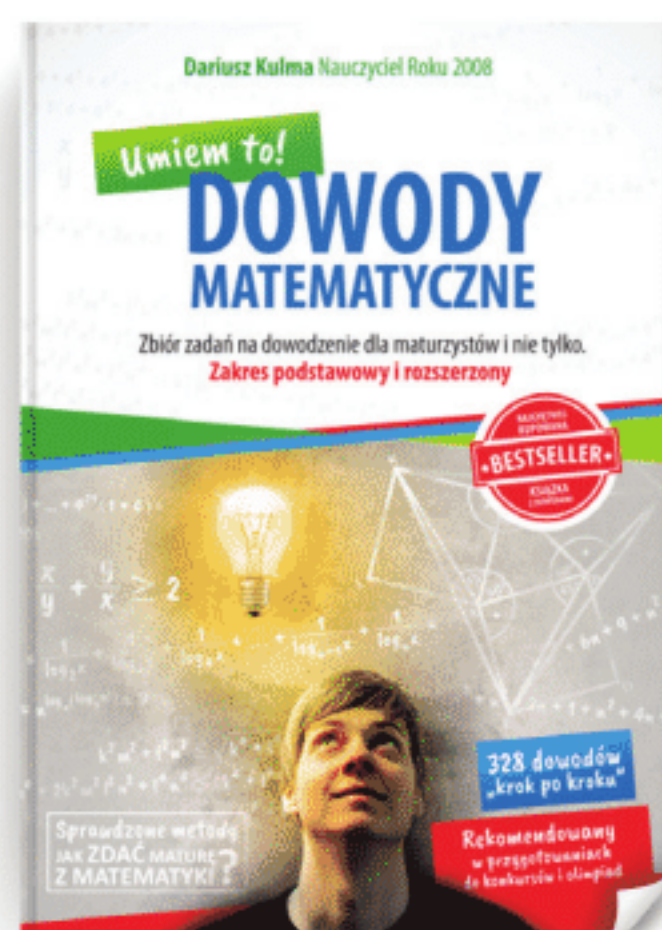
REPETYTORIUM "JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI?"

- ✓ Wszystkie najważniejsze zagadnienia — wzory, definicje, twierdzenia z przykładami.
- ✓ **677 ZADAŃ** (443 zadania rozwiązane „krok po kroku” i 234 zadania zawarte w podsumowaniach).
- ✓ Rozwiązania „krok po kroku”, wskazówki i komentarze — które wytłumaczą Ci każde zadanie jak najlepszy korepetytor.
- ✓ **PODSUMOWANIA** — które systematycznie porządkują Twoją wiedzę, również w wersji on-line (NOWOŚĆ).



ARKUSZE MATURALNE "JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI?"

- ✓ **331 ZADAŃ.**
- ✓ Pełne rozwiązania do zadań sprawiających maturzystom największą trudność, np. dowodów.
- ✓ Zadania autorskie opracowane na podstawie oficjalnych arkuszy CKE.
- ✓ Odpowiedzi do wszystkich zadań.



**BESTSELLER „DOWODY MATEMATYCZNE — UMIEM TO!  
ZBIÓR ZADAŃ NA DOWODZENIE DLA MATURZYSTÓW  
I NIE TYLKO”**

- ✓ **328 DOWODÓW** — na poziomie podstawowym i rozszerzonym.
- ✓ Rozwiązania „krok po kroku” do wszystkich zadań.
- ✓ Rekomendowana w przygotowaniach do konkursów i olimpiad matematycznych.
- ✓ Każde zadanie oznaczone poziomem trudności.
- ✓ Wskazówki do zadań do samodzielnego wykonania.

Więcej informacji: [jakzdacmaturezmatematyki.pl/ksiazka](http://jakzdacmaturezmatematyki.pl/ksiazka)





Odwiędz nasz fanpage!  
„Jak zdać maturę z matematyki”

# JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM ?

*dla bystrzaków i nie tylko!*



*W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!*

**Dariusz Kulma** to nauczyciel z ponad 20-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in.:

- ✓ nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia w 2008 roku,
- ✓ jako jedyny matematyk trzykrotnie nagrodzony w ogólnopolskim konkursie Nauczyciel Roku (pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego”) — w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji”, w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem **Nauczyciela Roku 2008**.
- ✓ Jest pomysłodawcą i twórcą projektu **Matematyka Innego Wymiaru** — zrzeszającego ponad 20 tysięcy uczniów w kraju.
- ✓ Jest autorem piętnastu zbiorów zadań, w tym dla najmłodszych uczniów z zadaniami z krainy Kwadratolandii.
- ✓ Prowadzi fanpage „Jak zdać maturę z matematyki?”, pomagając w rozwiązywaniu zadań, udzielając porad i wskazówek przedmaturalnych.
- ✓ Jest pomysłodawcą **Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży** oraz autorem zadań konkursowych.
- ✓ Jest autorem programu nauczania matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych opracowanego w ramach projektu E-laboratorium matematyczne.

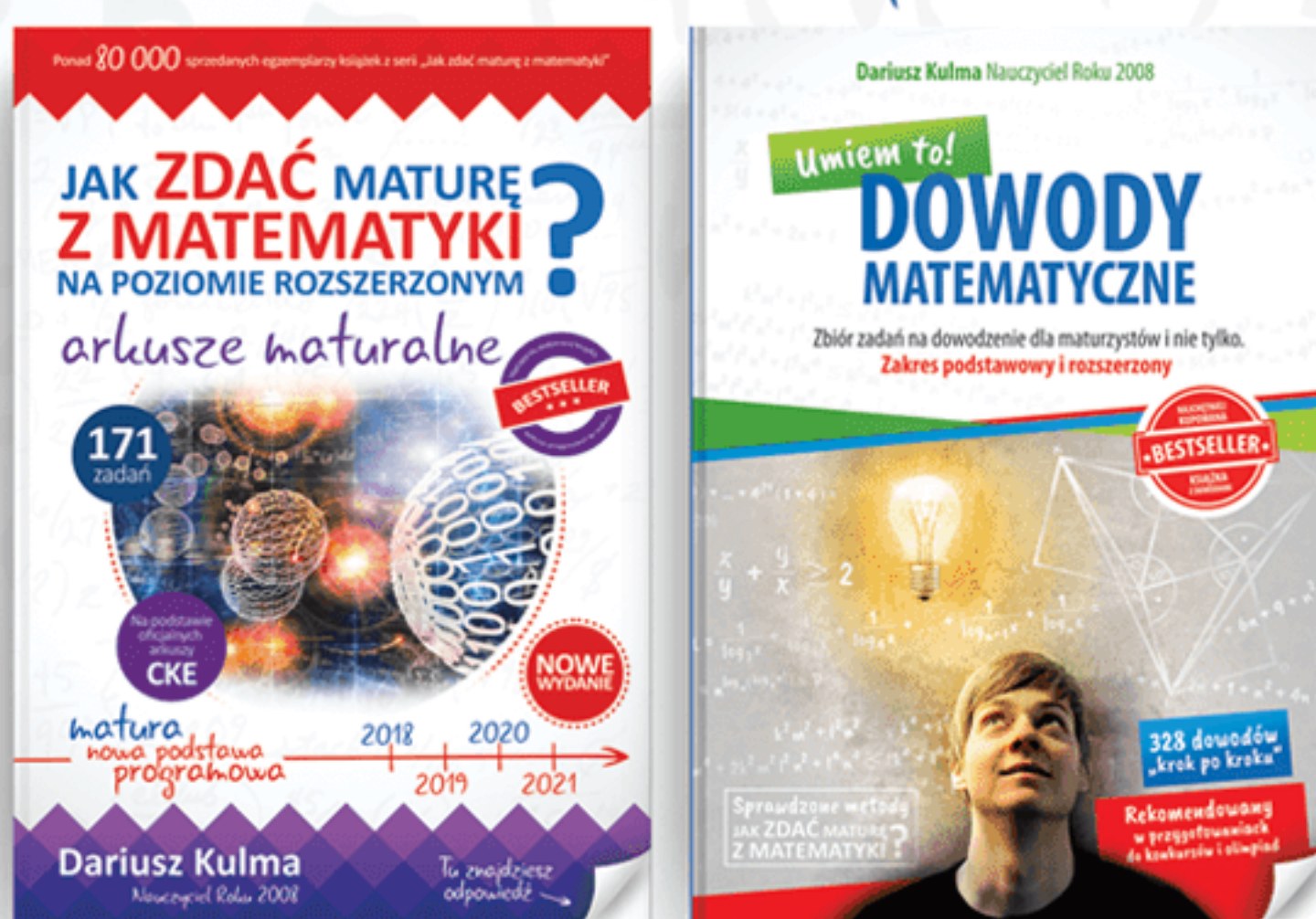
„(...) Autor książki prowadzi uczniów przez gęszcz zagadnień matematycznych w sposób prosty i bezpieczny. Zastosowany sposób narracji pozwala spokojnie przejść przez wszystkie najistotniejsze zagadnienia matematyki szkolnej, nie tylko prezentując gotowe rozwiązania, ale — uwzględniając najnowsze osiągnięcia psychologii i pedagogiki — dbając o trwałość powtarzanej wiedzy i nabytych umiejętności.”

Dr Witold Pająk, Honorowy Profesor Oświaty, rzeczoznawca MEN podręczników szkolnych

Dzięki wieloletniej pracy z młodzieżą Dariusz Kulma opracował własny system nauczania matematyki, dzięki któremu, jak twierdzą jego uczniowie, można polubić, a przede wszystkim zrozumieć ten przedmiot. Prowadzi zajęcia z maturzystami zarówno na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym. Skuteczność tych metod potwierdzają wyniki jego uczniów. W rekordowym roku osiągnęli oni średni wynik **91,45%** (przy średniej ogólnopolskiej ok. 50%). Co roku wszyscy jego uczniowie zdają egzamin maturalny, wielu z nich **otrzymuje wyniki 100%**, a ponad połowa z nich wyniki powyżej 90%!

**OD DZIŚ, DZIĘKI TEJ KSIĄŻCE, RÓWNIEŻ I TY MOŻESZ NALEŻEĆ DO GRONA OSÓB, KTÓRE OSIĄGNĘŁY SUKCES NA MATURZE!**

Autorskie arkusze maturalne Bestseller! Zbiór zadań maturalnych na dowodzenie



*Książki do kompletu, dzięki którym jeszcze lepiej zdasz maturę.*

## NA CZYM OPIERAMY NASZ SYSTEM?

- ✓ **710 ZADAŃ** (w tym 428 zadań rozwiązanych “krok po kroku”) — z matur z poprzednich lat oraz zadania autorskie, w tym dowody i zadania na wykazywanie.
- ✓ **WYĆWICZENIE UMIEJĘTNOŚCI** — specjalnie opracowany system pozwala na dokładne zapoznanie się z poszczególnymi zagadnieniami poprzez zadania do analizy, samodzielnie wykonywane zadania sprawdzające, a następnie podtrzymywanie wiedzy poprzez systematyczne powtórki przy pomocy podsumowań (dostępnych również jako **TESTY ON-LINE**).
- ✓ **NAJŁATWIEJSZE SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ** — wszystkie zadania zawierają odpowiedzi i komentarze pozwalające na prześledzenie sposobu rozwiązywania określonego rodzaju zadań.
- ✓ **ZADANIA ZGODNE Z AKTUALNĄ PODSTAWĄ PROGRAMOWĄ** (w tym zadania kodowane) — wyjaśniające zagadnienia z materiału obowiązującego obecnie na egzaminie maturalnym.



**ELITMAT**  
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-33-3



9 788363 975333

Cena 59,00 zł



Zamówienia on-line:  
[www.jakzdacmaturezmatematyki.pl](http://www.jakzdacmaturezmatematyki.pl)



Zamówienia telefoniczne lub SMS-em:  
51-7777-51



Zamówienia e-mail:  
[elitmat@elitmat.pl](mailto:elitmat@elitmat.pl)

*Sprawdź inne książki oraz materiały on-line na naszej stronie*