DODATEK DO REPETYTORIUM

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI? NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

ZAWIERA ZAGADNIENIA Z BRYŁ OBROTOWYCH
DO MATURY W NOWEJ FORMULE OBOWIĄZUJĄCEJ OD 2025 ROKU

Autor zadań:

Dariusz Kulma

Nauczyciel Roku 2008

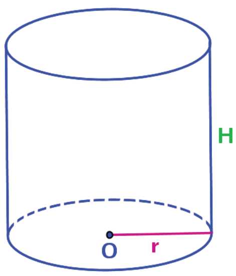
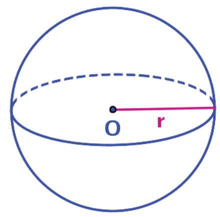
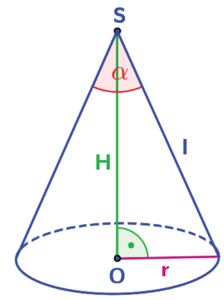
21 ZADAŃ Z BRYŁ OBROTOWYCH

w tym 15 zadań rozwiązanych "krok po kroku"

6 zadań w podsumowaniu

10 Stereometria

BRYŁY OBROTOWE

BRYŁA	WALEC	KULA	STOŻEK
			
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = \pi r^2 \cdot H$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r H$	$P = 4\pi r^2$	$P_c = \pi r^2 + \pi r l$
INNE WAŻNE INFORMACJE	r — promień H — wysokość	r — promień	r — promień H — wysokość l — tworząca α — kąt rozwarcia stożka

Zadania — wykorzystanie podstawowych własności brył obrotowych

ZADANIE 1	*zadanie do analizy*	1 pkt	

Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 80π. Wysokość tego walca jest równa:

A. 10 B. 5 C. 16 D. 20

ROZWIĄZANIE

1° Aby obliczyć wysokość, skorzystamy ze wzoru na objętość walca.

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

2° Podstawiamy wartości, które są dane i obliczamy wysokość.

$$\pi \cdot 4^2 \cdot H = 80\pi \quad |: \pi$$
$$16H = 80 \quad |: 16$$
$$H = 5$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

ZADANIE 2	*zadanie ze wskazówkami*	1 pkt	

Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy równym 3 wynosi 24π. Długość tworzącej tego stożka jest równa:

A. 3 B. 10 C. 8 D. 5

ROZWIĄZANIE

1° Aby obliczyć tworzącą stożka, skorzystamy ze wzoru na jego pole powierzchni całkowitej.

2° Podstawiamy wartości, które są dane i obliczamy długość tworzącej l.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 3	*zadanie sprawdzające*	1 pkt	

Objętość walca o wysokości 8 jest równa 32π. Promień podstawy tego walca jest równy:

A. 6 B. 3 C. 4 D. 2

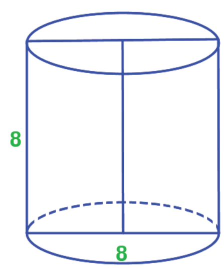
ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 4	*zadanie do analizy*	1 pkt	

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 8.
Objętość tego walca jest równa:

A. 512π C. 32π
B. 128π D. 64π



ROZWIĄZANIE

1° Jeżeli przekrój jest kwadratem o boku 8, to promień jest połową tego boku i wynosi 4.

$r = 4 \quad \Rightarrow \quad H = 8$

2° Objętość walca obliczamy ze wzoru: $V = \pi r^2 H$, podstawiając odpowiednie wartości.

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = \pi \cdot 16 \cdot 8 = 128\,\pi$

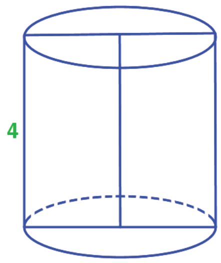
POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

ZADANIE 5	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	sierpień 2014

Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4, jest równe:

A. 256π C. 48π

B. 128π D. 24π



ROZWIĄZANIE

1° Jeżeli przekrój jest kwadratem o boku 4, to możemy obliczyć promień walca.

2° Pole powierzchni całkowitej walca obliczamy ze wzoru: $P = 2\pi r^2 + 2\pi r H$, podstawiając odpowiednie wartości.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 6	zadanie sprawdzające	1 pkt	

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu 12. Pole powierzchni bocznej walca wynosi:

A. 12π B. 24π C. 36π D. $4\sqrt{3}\,\pi$

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 7	zadanie do analizy	1 pkt	

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

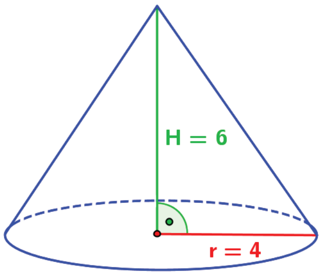
A. 96π B. 48π C. 32π D. 8π

ROZWIĄZANIE

1° Jeżeli trójkąt obróci się wokół dłuższej przyprostokątnej, to powstanie stożek o wysokości $H = 6$ i promieniu $r = 4$ (patrz rysunek).

2° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$, podstawiając odpowiednie wartości.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot 16 \cdot \cancel{6}^2 = 32\pi$$



POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

ZADANIE 8	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	

Trójkąt równoboczny o boku długości 12 obracamy wokół wysokości. Objętość powstałego stożka wynosi:

A. 288π B. 1728π C. $72\sqrt{3}\pi$ D. 432π

ROZWIĄZANIE

1° Jeżeli trójkąt równoboczny obróci się wokół wysokości, to powstanie stożek, w którym promień jest połową boku trójkąta, więc równy jest 6, a wysokość stożka jest również wysokością trójkąta.

2° Obliczamy wysokość trójkąta ze wzoru: $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 9	zadanie sprawdzające	1 pkt	

Kwadrat o przekątnej $5\sqrt{2}$ obracamy wokół jednego z boków. Objętość powstałego walca jest równa:

A. $31{,}25\pi$ B. 125π C. 500π D. $\frac{125}{3}\pi$

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

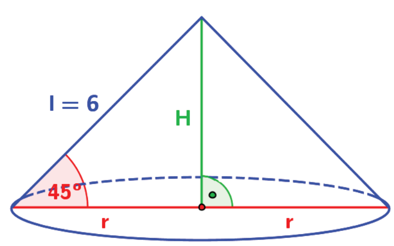
ZADANIE 10	zadanie do analizy	1 pkt	

Tworząca stożka ma długość 6 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

A. $3\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 3

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



2° Wysokość H stożka możemy obliczyć za pomocą funkcji sinus. $\sin 45^\circ = \frac{H}{6}$

3° Odczytujemy wartość $\sin 45^\circ$ z tablic. $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4° Układamy równanie i wyliczamy H.

$$\frac{H}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2H = 6\sqrt{2} \quad |:2$$

$$H = 3\sqrt{2}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ZADANIE 11	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	

Przekątna przekroju osiowego walca o długości 8 tworzy z podstawą kąt 30°. Promień tego walca jest równy:

A. 2 B. 4 C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.

2° Promień r walca możemy obliczyć za pomocą jednej z funkcji trygonometrycznych.

3° Odczytujemy jej wartość z tablic.

4° Układamy równanie i wyliczamy r.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 12	zadanie sprawdzające	1 pkt	

Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Jeżeli średnica stożka ma długość 24, długość tworzącej jest równa:

A. 24 B. $12\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{2}$ D. 12

ROZWIĄZANIE

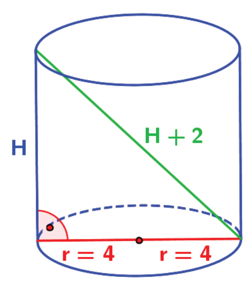
POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 13	zadanie do analizy	4 pkt	

Przekątna przekroju osiowego walca jest o 2 dłuższa od wysokości tego walca. Oblicz objętość walca, jeśli promień jego podstawy jest równy 4.

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



2° Obliczamy średnicę podstawy.

$2r = 2 \cdot 4 = 8$

3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy wysokość H.

$$H^2 + 8^2 = (H+2)^2$$
$$\cancel{H^2} + 64 = \cancel{H^2} + 4H + 4$$
$$-4H = 4 - 64$$
$$-4H = -60 \quad |:(-4)$$
$$H = 15$$

4° Obliczamy objętość walca ze wzoru: $V = \pi r^2 H$.

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 15 = \pi \cdot 16 \cdot 15 = 240\pi$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: Objętość walca wynosi 240π.

ZADANIE 14	zadanie ze wskazówkami	4 pkt	CKE

Tworząca stożka ma długość 17, a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 22. Oblicz pole powierzchni i objętość tego stożka.

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.

2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć promień r.

3° Obliczamy wysokość H.

4° Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka ze wzoru: $P_c = \pi r^2 + \pi r l$.

5° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 15	zadanie sprawdzające	4 pkt	

Tworząca stożka jest o 3 dłuższa od średnicy jego podstawy. Wiedząc, że wysokość stożka wynosi 12, oblicz jego pole powierzchni całkowitej oraz objętość.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

9 Stereometria
— rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających

Rozwiązania — wykorzystanie podstawowych własności brył obrotowych

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2		1 pkt	

Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy równym 3 wynosi 24π. Długość tworzącej tego stożka jest równa:

A. 3 B. 10 C. 8 D. 5

ROZWIĄZANIE

1° Aby obliczyć tworzącą stożka, skorzystamy ze wzoru na jego pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

2° Podstawiamy wartości, które są dane i obliczamy długość tworzącej l.

$$\pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot l = 24\pi$$
$$9\pi + 3\pi l = 24\pi$$
$$3\pi l = 15\pi \quad |:3\pi$$
$$l = 5$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

ROZWIĄZANIE ZADANIA 3		1 pkt	

Objętość walca o wysokości 8 jest równa 32π. Promień podstawy tego walca jest równy:

A. 6 B. 3 C. 4 D. 2

ROZWIĄZANIE

1° Aby obliczyć promień podstawy, skorzystamy ze wzoru na objętość:

$$V = \pi r^2 H$$

2° Podstawiamy wartości, które są dane i obliczamy promień podstawy.

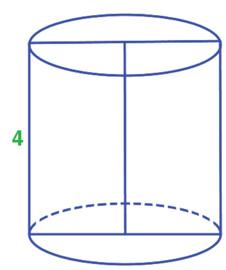
$$\pi r^2 H = 32\pi$$
$$\pi r^2 \cdot 8 = 32\pi \quad |:8\pi$$
$$r^2 = 4$$
$$r = \sqrt{4} = 2$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

ROZWIĄZANIE ZADANIA 5		1 pkt	sierpień 2014

Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4, jest równe:

A. 256π C. 48π
B. 128π D. 24π



ROZWIĄZANIE

1° Jeżeli przekrój jest kwadratem o boku 4, to promień jest połową tego boku i wynosi 2.	$r=2 \quad \Rightarrow \quad H=4$
2° Pole powierzchni całkowitej walca obliczymy ze wzoru: $P=2\pi r^2+2\pi rH$, podstawiając odpowiednie wartości.	$P_c=2\pi\cdot 2^2+2\pi\cdot 2\cdot 4=2\pi\cdot 4+16\pi=$ $=8\pi+16\pi=24\pi$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

ROZWIĄZANIE ZADANIA 6 — 1 pkt

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu 12. Pole powierzchni bocznej walca wynosi:

A. 12π B. 24π C. 36π D. $4\sqrt{3}\,\pi$

ROZWIĄZANIE

1° Jeżeli przekrój jest kwadratem o polu 12, to możemy obliczyć bok kwadratu.	$a^2=12$ $a=\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$
2° Jeżeli bok kwadratu wynosi $2\sqrt{3}$, to promień jest połową tego boku i wynosi $\sqrt{3}$.	$r=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad H=2\sqrt{3}$
3° Pole powierzchni bocznej walca obliczymy ze wzoru: $P_b=2\pi rH$, podstawiając odpowiednie wartości.	$P_b=2\pi\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=12\pi$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ROZWIĄZANIE ZADANIA 8 — 1 pkt

Trójkąt równoboczny o boku długości 12 obracamy wokół wysokości. Objętość powstałego stożka wynosi:

A. 288π B. 1728π C. $72\sqrt{3}\,\pi$ D. 432π

ROZWIĄZANIE

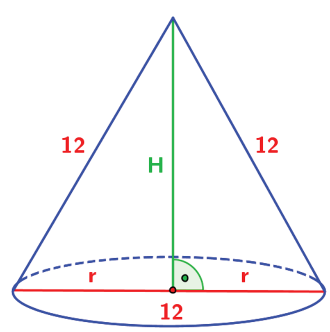
1° Jeżeli trójkąt równoboczny obróci się wokół wysokości, to powstanie stożek, w którym promień jest połową boku trójkąta, więc równy jest 6, a wysokość stożka jest również wysokością trójkąta (patrz rysunek).

2° Obliczamy wysokość trójkąta ze wzoru: $H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$H=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

3° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 H$.

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 6\sqrt{3}=\frac{1}{\cancel{3}_{1}}\pi\cdot\overset{12}{\cancel{36}}\cdot 6\sqrt{3}=72\sqrt{3}\,\pi$$



POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

ROZWIĄZANIE ZADANIA 9 — 1 pkt

Kwadrat o przekątnej $5\sqrt{2}$ obracamy wokół jednego z boków. Objętość powstałego walca jest równa:

A. $31{,}25\pi$ B. 125π C. 500π D. $\frac{125}{3}\pi$

ROZWIĄZANIE

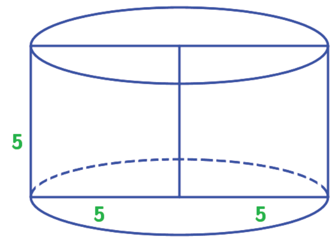
1° Znając przekątną, obliczamy długość boku kwadratu ze wzoru: $d = a\sqrt{2}$.

$a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$a = 5$

2° Jeżeli kwadrat obróci się wokół jednego z boków, to powstanie walec, w którym promień i wysokość są równe bokowi kwadratu (patrz rysunek).

$r = H = a = 5$



3° Obliczamy objętość walca ze wzoru: $V = \pi r^2 H$, podstawiając odpowiednie wartości.

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = \pi \cdot 25 \cdot 5 = 125\pi$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

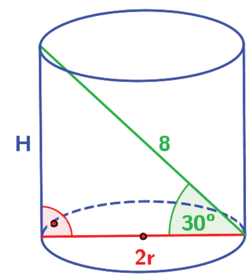
ROZWIĄZANIE ZADANIA 11 | 1 pkt

Przekątna przekroju osiowego walca o długości 8 tworzy z podstawą kąt 30°. Promień tego walca jest równy:

A. 2 B. 4 C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



2° Promień r walca możemy policzyć za pomocą funkcji cosinus.

$\cos 30^\circ = \frac{2r}{8}$

3° Odczytujemy wartość $\cos 30^\circ$ z tablic.

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4° Układamy równanie i wyliczamy r.

$\frac{2r}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4r = 8\sqrt{3} \quad |:4$

$r = 2\sqrt{3}$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

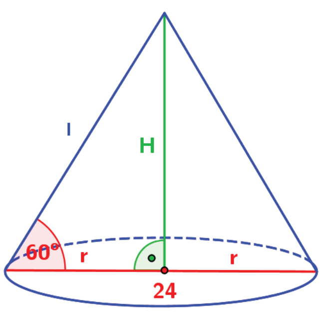
ROZWIĄZANIE ZADANIA 12 | 1 pkt

Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Jeżeli średnica stożka ma długość 24, długość tworzącej jest równa:

A. 24 B. $12\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{2}$ D. 12

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



2° Długość tworzącej stożka l możemy policzyć z funkcji cosinus.

$\cos 60^\circ = \frac{r}{l}$

3° Obliczamy promień stożka, który jest połową średnicy.

$r = 24 : 2 = 12$

4° Odczytujemy wartość $\cos 60^\circ$ z tablic.

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

5° Podstawiamy za $r = 12$, tworzymy równanie i wyliczamy l.

$\cos 60^\circ = \frac{12}{l}$

$\frac{1}{2} = \frac{12}{l}$

$l = 24$

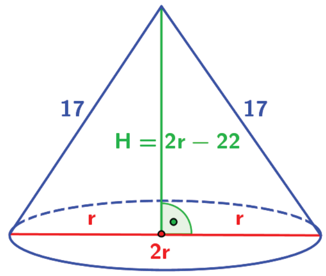
POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ROZWIĄZANIE ZADANIA 14		4 pkt	CKE

Tworząca stożka ma długość 17, a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 22. Oblicz pole powierzchni i objętość tego stożka.

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć promień r.

$$r^2+(2r-22)^2=17^2$$
$$r^2+4r^2-88r+484=289$$
$$5r^2-88r+195=0$$
$$\Delta=7744-3900=3844$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{3844}=62$$
$$r_1=\frac{88-62}{2\cdot 5}=\frac{26}{10}=2{,}6$$
$$r_2=\frac{88+62}{2\cdot 5}=\frac{150}{10}=15$$

3° Obliczamy wysokość H.

$H=2r-22$ lub $H=2r-22$
$H=2\cdot 2{,}6-22$ $\quad$ $H=2\cdot 15-22$
$H=5{,}2-22$ $\quad$ $H=30-22$
$H=-16{,}8\notin\mathbb{R}_+$ $\quad$ $H=8$

4° Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka ze wzoru: $P_c=\pi r^2+\pi rl$.

$$P_c=\pi\cdot 15^2+\pi\cdot 15\cdot 17=225\pi+255\pi=480\pi$$

5° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 H$.

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 15^2\cdot 8=\frac{1}{\cancel{3}_{1}}\pi\cdot\cancel{225}^{75}\cdot 8=600\pi$$

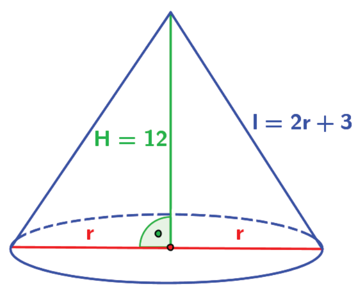
POPRAWNA ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni stożka wynosi 480π, a objętość stożka wynosi 600π.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 15		4 pkt	

Tworząca stożka jest o 3 dłuższa od średnicy jego podstawy. Wiedząc, że wysokość stożka wynosi 12, oblicz jego pole powierzchni całkowitej oraz objętość.

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć promień r.

$$r^2+12^2=(2r+3)^2$$
$$r^2+144=4r^2+12r+9$$
$$-3r^2-12r+135=0 \quad |:(-3)$$
$$r^2+4r-45=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{196}=14$$
$$r_1=\frac{-4-14}{2}=\frac{-18}{2}=-9\notin\mathbb{R}_+$$
$$r_2=\frac{-4+14}{2}=\frac{10}{2}=5$$

3° Obliczamy długość tworzącej.

$$l=2r+3=2\cdot 5+3=10+3=13$$

ROZWIĄZANIE

4° Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka ze wzoru: $P_c = \pi r^2 + \pi r l$.

$P_c = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 13 = 25\pi + 65\pi = 90\pi$

5° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot \overset{4}{\cancel{12}} = \pi \cdot 25 \cdot 4 = 100\pi$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 90π, a jego objętość 100π.

10 Podsumowanie

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzedniego działu. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

Możesz skorzystać ze wskazówki. To numer zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu. ↓

ZAD. P.10.1 (0-1) (czerwiec 2014) Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 96π. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe: zobacz zad. 3

A. 16π B. 24π C. 32π D. 48π

ZAD. P.10.2 (0-1) Objętość walca o wysokości 7 jest równa 63π. Promień podstawy tego walca jest równy: zobacz zad. 3

A. 6 B. 3 C. 9 D. 4

ZAD. P.10.3 (0-1) Tworząca stożka o długości 8 jest nachylona do płaszczyzny podstawy od kątem 60°. Wysokość tego stożka jest równa: zobacz zad. 10

A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

ZAD. P.10.4 (0-1) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 8 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa: zobacz zad. 7

A. $\frac{320}{3}\pi$ B. $\frac{160}{3}\pi$ C. $\frac{200}{3}\pi$ D. $\frac{100}{3}\pi$

ZAD. P.10.5 (0-1) Pole powierzchni całkowitej kuli jest równe 100π. Średnica tej kuli ma długość: zobacz inf. na str.1

A. 5 B. 10 C. $5\sqrt{2}$ D. 20

ZAD. P.10.6 (0-2) Przekątna przekroju osiowego walca wynosi 17, a promień podstawy jest równy 4. Oblicz objętość tego walca. zobacz zad. 13

ODPOWIEDZI DO PODSUMOWANIE NR 10

P. 10.1 D P. 10.2 B P. 10.3 A P. 10.4 C P. 10.5 B P. 10.6 240π