Ponad 200 000 sprzedanych egzemplarzy

NOWE WYDANIE

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM?

dla bystrzaków i nie tylko!

Najczęściej wybierana książka

BESTSELLER

podczas przygotowań do matury

792 zadania

NOWA FORMUŁA MATURY

w tym 456 zadań rozwiązanych "krok po kroku"

matura 2024 2025

aktualna podstawa programowa

Dariusz Kulma

Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz odpowiedź

DARIUSZ KULMA

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM?

dla bystrzaków
i nie tylko!

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2023

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Druk i oprawa:
Drukarnia "KOLUMB"
ul. Kaliny 7
41-506 Kraków

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z www.fotolia.com: © Drobot Dean - id. 206995501; © ag visuell - id. 53584856; © Dreaming Andy - id. 62704436; © valdis torms - id. 46177828; © Marek - id. 68124775; © valdis torms - id. 66702797; © Denis Junker - id. 54171604; © Andrey_Arkusha - id. 74798374; © dengess - id. 42780077; © Lovrencg - id. 51595955; © kharlamova_lv - id. 47907680

Fotografie z www.pixabay.com: PublicDomainPictures - id. animal-1717_640; stux - id. origami-210114_1280; blickpixel - id. cube-570703_1920; MolnarSzabolcsErdely - id. game-7634718_1920; an_photos - id. s_color-4503279;

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl , www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2023. Wydanie piąte.

ISBN: 978-83-63975-50-0

WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać, aby wiedzieć dlaczego, co i jak powtarzać, żeby osiągnąć sukces na maturze!

Drogi Maturzysto!

Jeśli zastanawiasz się nad zdawaniem egzaminu maturalnego z matury rozszerzonej z matematyki lub jesteś pewien, że będziesz zdawać ten egzamin, ale jeszcze nie wiesz, co będziesz studiować, to znaczy, że nie do końca masz sprecyzowany cel – gdzie podążać i za czym. I wiesz co? Wcale Ci się nie dziwię. Żyjemy w czasach o wyjątkowym dynamizmie. Jedyne, czego możesz być pewien w swoim życiu, to ZMIANA. I na tę zmianę warto się przygotować. Amerykański badacz przyszłości Thomas Fray mówi, że: „60% zawodów, w których ludzie będą pracować w ciągu najbliższych 10 lat, jeszcze nie powstało". Badania mówią, że w ciągu 20 lat połowa istniejących teraz zawodów zniknie! Jak robiono te badania, to nikt pewnie nie wyobrażał sobie, że stanie się to jeszcze szybciej za sprawą sztucznej inteligencji. Są również badania, które mówią o obecnych maturzystach (pokoleniu Z), którzy 17 razy w życiu zmienią pracę! Powiesz sobie pewnie teraz: „skoro tak, to jaki sens jest w ogóle studiować, jeżeli nie wiem, co będę w życiu robić?". A jednak da się wyraźnie zaobserwować pewne trendy i przygotować się właśnie na ciągłą ZMIANĘ. Większość dobrze płatnych zawodów związana jest z postępem technologicznym, ale i kreatywnością. To konsekwencja postępu – chcemy mieć lepsze urządzenia i maszyny, żyć łatwiej i wygodniej. Druga kategoria to wszystko, co związane z szeroko pojętym zdrowiem i medycyną. Ludzie chcą być młodsi, zdrowsi, żyć dłużej. Jednak tu także wiele aspektów opiera się na technologicznym postępie i wiedzy. Tego obszaru również nie można pominąć.

Mimo że sztuczna inteligencja będzie cały czas mocno zmieniać rynek pracy, to na pewno poszukiwanymi osobami będą osoby o dużym stopniu kreatywności i analitycznego myślenia. A przecież te umiejętności rozwija właśnie matematyka. To na matematyce oparty jest cały rynek technologiczny czy finansowy. Nie wiem, jaki zawód będzie idealnym zawodem przyszłości, ale chciałbym, żebyś zobaczył trend, kierunek, do którego zmierza rynek pracy na świecie i w Polsce. Do studiowania większości nowoczesnych kierunków potrzebna jest **matematyka**. I nie chodzi tylko o egzamin na poziomie rozszerzonym, ale w ogóle o fakt uczenia się matematyki. Matematyka to nauka logicznego myślenia, rozwijania umiejętności algorytmicznych, ale również rozwój kreatywności. **To taka swoista autostrada w Twoim rozwoju, która otwiera znacznie więcej furtek we współczesnych czasach niż inne dziedziny wiedzy.**

Książka, którą trzymasz w ręku, jest wynikiem wielu moich doświadczeń i obserwacji. Jak pewnie wiesz, matura z matematyki na poziomie rozszerzonym jest o wiele trudniejsza od tej z poziomu podstawowego. Abiturienci zauważają, że w odróżnieniu od matury na poziomie podstawowym nie ma na maturze rozszerzonej tak wielu „pewniaków". Często spotykam się z pytaniami: „Na jakie zadania postawić? Czego uczyć się w pierwszej kolejności? Co będzie na pewno?".

Na maturze rozszerzonej takich stuprocentowych pewniaków praktycznie nie ma. Jest jednak pewien kanon umiejętności, które, mimo zmian podstawy programowej, nadal będą pojawiały się w zadaniach maturalnych. Ta książka pomoże Ci opanować właśnie te najważniejsze umiejętności, byś mógł je skutecznie wykorzystać na maturze.

Dlaczego nauka z tą książką jest skuteczniejsza i czym ta książka różni się od innych?

Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym?" to specjalny system przygotowań, sprawdzający się na kursach i zajęciach, które prowadzę. To wynik ponad 25 lat pracy i gromadzenia doświadczeń, obserwacji dokonanych na dziesiątkach tysięcy lekcji, jakie przeprowadziłem. Dzięki temu systemowi przygotowanie jest bardzo skuteczne.

Książka składa się z 13 działów i zawiera 456 zadań omówionych krok po kroku. W każdym zadaniu zostały wyodrębnione poszczególne etapy i czynności, które musisz zrealizować. Zadania zostały ułożone parami. **Pierwsze (z numerem nieparzystym) jest zadaniem do analizy. Analizujesz to zadanie krok po kroku, obserwując, jak jest rozwiązywane. Drugie zadanie (z numerem parzystym) jest zadaniem sprawdzającym do samodzielnego wykonania.** Jest ono podobne do zadania pierwszego, nieraz jest prawie takie samo, a czasami tylko w jakimś stopniu do niego nawiązuje. Dzięki temu będziesz mógł samodzielnie wyćwiczyć nowe umiejętności i sprawdzić, czy już je opanowałeś. Pod koniec rozdziału możesz sprawdzić pełne rozwiązanie tego zadania, aby się przekonać, czy wszystko rozumiesz i wykonujesz poprawnie. **W żadnej innej książce zadania nie są ułożone w taki sposób. Twoja praca będzie niezwykle efektywna, a zadania, które samodzielnie wykonasz, utwierdzą Cię w przekonaniu, że jesteś na właściwej drodze.** Zadania odnoszą się do nowej podstawy programowej, ale z uwagi, że matura 2024 ma wprowadzone „cięcia programowe”, to przy części zadań wprowadziliśmy oznaczenie z datą 2025, abyś wiedział, czy dane zagadnienia będą obowiązywały w konkretnym roku czy nie.

Na początku każdego działu znajdziesz najważniejsze informacje i wzory. Wiele wzorów czy zagadnień rozszerza treści tablic matematycznych i warto z nich korzystać. Często pozwolą Ci w szybszy sposób rozwiązać zadanie. Nigdy nie omijaj tej części. Zawsze przeglądaj wzory i przypominaj je sobie. Przy rozwiązywaniu określonego zadania zastanów się na przykład, które wzory już znasz, a których jeszcze nie wykorzystywałeś.

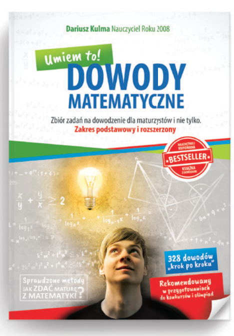
Nie wszystkie przedstawione tu zadania mogłyby znaleźć się na maturze, ale należało je uwzględnić, aby książka tworzyła spójną całość i byś mógł łatwiej zrozumieć dany materiał. Dlatego nie omijaj żadnych zadań. Wykonaj zarówno te, które wydają Ci się łatwe, jak i te, które sprawiają Ci trudność. **Wszystko możesz zrozumieć — bądź tylko konsekwentny w swoich przygotowaniach do matury.**

Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych. Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghausa i Tony'ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6 – 7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawią się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.** Podsumowania składają się z zadań testowych i zadań otwartych krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi. Ułożenie zadań przypomina rozbudowany arkusz maturalny. Łącznie jest to 336 zadań maturalnych, które sprawią, że będziesz miał coraz trwalej opanowane umiejętności. Co ważne, w podsumowaniach tych znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów — w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowaniu nr 5 z poprzednich pięciu. Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury! Przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz wskazówki. Najczęściej będzie to numer zadania podobnego, czasem podpowiedź, w którym kierunku ruszyć z zadaniem, a czasami jakich konkretnych informacji użyć. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań, a nawet rozwiązania krok po kroku, gdy zadanie jest dowodem lub innym zadaniem na wykazywanie.

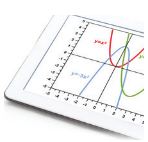
I jeszcze jedno! Nie bój się dowodów. Zadania tego typu uczą Cię uogólniać fakty matematyczne, są bardzo rozwijające i pobudzają Twoją kreatywność. Rozwiązuj jak najwięcej zadań tego typu. Jeszcze więcej dowodów znajdziesz w mojej innej książce **„Dowody matematyczne — zbiór zadań dla maturzystów i nie tylko”**. Jeśli będziesz chciał być mistrzem dowodów, to serdecznie polecam Ci tę książkę. Polecam Ci również inne moje książki, jak **„101 zadań dla ambitnych maturzystów”**, dwutomowe **„Karty pracy na poziomie rozszerzonym”** czy **„Arkusze maturalne na poziomie rozszerzonym”**.

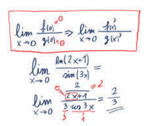
O książkach, kursach oraz innych wydarzeniach dla maturzystów znajdziesz więcej na mojej stronie:
www.dariuszkulma.elitmat.pl

Powodzenia!



SPIS TREŚCI





zadanie do analizy	← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzami objaśniającymi poszczególne etapy rozwiązania.
zadanie sprawdzające	← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania.
ROZWIĄZANIE	← Pełne rozwiązanie zadania sprawdzającego, znajdujące się na końcu każdego działu.
warto wiedzieć...	← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań.
wskazówka, uwaga!	← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania.
Podsumowanie	← Podsumowujące zadania testowe oraz zadania otwarte obejmujące zagadnienia z działu, po którym się znajdują oraz poprzednich. Np. Podsumowanie 7 zawiera zadania z trygonometrii oraz zagadnienia z poprzednich sześciu działów.
Od matury 2025	← Zagadnienie lub zadanie, które będzie obowiązywało na maturze od 2025 roku.

1 Liczby rzeczywiste

Potęgi i pierwiastki

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
POTĘGA	$\begin{cases} a^0 = 1 & \text{dla } a \neq 0 \\ a^1 = a & \text{dla } a \in \mathbb{R} \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ czynników} & \text{dla } a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$	$3^0 = 1, 15^0 = 1, (-3)^0 = 1$ $3^1 = 3, (-7)^1 = -7$ $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
PIERWIASTEK ST. DRUGIEGO	$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$, przy czym liczby a i b są nieujemne	$\sqrt{25} = 5$, ponieważ $5^2 = 25$
PIERWIASTEK ST. TRZECIEGO	$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$, gdzie liczby a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi	$\sqrt[3]{64} = 4$, ponieważ $4^3 = 64$ $\sqrt[3]{-27} = -3$, ponieważ $(-3)^3 = -27$

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	
$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$, $\frac{10^{30}}{10^{25}} = 10^{30-25} = 10^5$	$a \neq 0$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$	
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ lub $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$n \in \mathbb{Z}, a \neq 0$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ potęga o wykładniku wymiernym dodatnim	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}_+$ oraz dla n parzystego: $a \geq 0$, dla n nieparzystego: $a \in \mathbb{R}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ potęga o wykładniku wymiernym ujemnym	$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{1}{8}$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}_+$ oraz dla n parzystego: $a > 0$, dla n nieparzystego: $a \neq 0$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$	
$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$6^5 : 2^5 = (6 : 2)^5 = 3^5$	$b \neq 0$

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$\sqrt[n]{0}=0$	$\sqrt[3]{0}=0$	$n\in\mathbb{N}, n>1$
$\sqrt[n]{1}=1$	$\sqrt[7]{1}=1$	$n\in\mathbb{N}, n>1$
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{13{,}5}=\sqrt[3]{2\cdot 13{,}5}=\sqrt[3]{27}=3$	$n\in\mathbb{N}, n>1$ oraz dla n parzystego: $a\geq 0$, $b\geq 0$, dla n nieparzystego: $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$	$n\in\mathbb{N}, n>1$ oraz dla n parzystego: $a\geq 0$, $b>0$, dla n nieparzystego: $a\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\cdot 2]{64}=\sqrt[6]{64}=2$	$n\in\mathbb{N}, n>1, m\in\mathbb{N}, m>1$ dla n i m — obu liczb nieparzystych: $a\in\mathbb{R}$, w przeciwnym wypadku: $a\geq 0$.
$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$	$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\lvert 1-\sqrt{3}\rvert=\sqrt{3}-1$	
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3+2\sqrt{2\cdot 3}}=$ $=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$	$a\geq 0, b\geq 0$
$\lvert\sqrt{a}-\sqrt{b}\rvert=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$	$\lvert\sqrt{3}-\sqrt{2}\rvert=\sqrt{3+2-2\sqrt{3\cdot 2}}=$ $=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$	$a\geq 0, b\geq 0$

Zadania — działania na potęgach i pierwiastkach

ZADANIE 1 *zadanie do analizy*

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2^{2015}:0{,}25^{-609}}{\left[(2\sqrt{2})^2\right]^{162}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-78}}$, wykorzystując odpowiednie twierdzenia.

ROZWIĄZANIE

Przedstawiamy poszczególne wyrazy w wyrażeniu w postaci potęg o tej samej podstawie równej 2.

$$\frac{2^{2015}:0{,}25^{-609}}{\left[(2\sqrt{2})^2\right]^{162}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-78}}=\frac{2^{2015}:\left(\frac{1}{4}\right)^{-609}}{8^{162}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-78}}=\frac{2^{2015}:(2^{-2})^{-609}}{(2^3)^{162}\cdot(2^{-4})^{-78}}=\frac{2^{2015}:2^{1218}}{2^{486}\cdot 2^{312}}=\frac{2^{797}}{2^{798}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $\frac{1}{2}$

ZADANIE 2 *zadanie sprawdzające*

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[4]{16^{-1}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}}{64^{\frac{2}{3}}:(2\sqrt{2})^6}$, wykorzystując odpowiednie twierdzenia.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 3 — zadanie do analizy

Porównaj liczby $a = 25^{125}$ i $b = 125^{25}$.

ROZWIĄZANIE

Liczby a i b przedstawiamy w postaci potęgi o tej samej podstawie równej 5.

$a = 25^{125} = (5^2)^{125} = 5^{2 \cdot 125} = 5^{250}$

$b = 125^{25} = (5^3)^{25} = 5^{3 \cdot 25} = 5^{75}$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $a > b$

ZADANIE 4 — zadanie sprawdzające

Porównaj liczby $a = 27^{18}$ i $b = 9^{27}$.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 5 — zadanie do analizy

Porównaj liczby $x = 3^{4000}$ i $y = 4^{3000}$.

ROZWIĄZANIE

Nie można zamienić podstaw obu potęg tak, aby była taką samą liczbą. Można jednak zamienić wykładniki potęg tak, że wystąpi w nich wielokrotność takiej samej liczby (1000).

$x = 3^{4000} = (3^4)^{1000} = 81^{1000}$

$y = 4^{3000} = (4^3)^{1000} = 64^{1000}$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $x > y$

ZADANIE 6 — zadanie sprawdzające

Ustaw liczby $4^{68}; 5^{51}; 12^{34}$ w kolejności rosnącej.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 7 — zadanie do analizy

Porównaj liczby $x = 2^{22} \cdot 3^{15} \cdot 5^{28}$ i $y = 2^{14} \cdot 3^{23} \cdot 5^{20} \cdot 6^8$.

ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy takie same czynniki w obu liczbach.

$x = \underline{2^{14}} \cdot 2^8 \cdot \underline{3^{15}} \cdot \underline{5^{20}} \cdot 5^8 = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{20} \cdot 2^8 \cdot 5^8$

$y = \underline{2^{14}} \cdot \underline{3^{15}} \cdot 3^8 \cdot \underline{5^{20}} \cdot 6^8 = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{20} \cdot 3^8 \cdot 6^8$

2° Wystarczy więc, że porównamy elementy różniące się w obu liczbach.

$2^8 \cdot 5^8 < 3^8 \cdot 6^8$,

ponieważ $(2 \cdot 5)^8 < (3 \cdot 6)^8$, więc $10^8 < 18^8$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $x < y$

ZADANIE 8 — *zadanie sprawdzające*

Porównaj liczby $x = 6^{20}$ i $y = 27^{14}$.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 9 — *zadanie do analizy*

Porównaj liczby x^y i y^x, jeśli: $x = \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$, $y = \dfrac{8^{-4}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot 32^{-3}}$.

ROZWIĄZANIE

1° Obliczamy wartość x, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$x = \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 =$$
$$= 3 - \cancel{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}} + 3 + \cancel{2\sqrt{2}} =$$
$$= 6 + 2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 6 + 2\sqrt{9-8} = 6 + 2 = 8$$

2° Obliczamy wartość y, korzystając z działań na potęgach o tej samej podstawie.

$$y = \frac{8^{-4}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot 32^{-3}} = \frac{(2^3)^{-4}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}\cdot(2^5)^{-3}} = \frac{2^{-12}}{2\cdot 2^{-15}} = \frac{2^{-12}}{2^{-14}} = 2^2 = 4$$

3° Zapisujemy potęgi 8^4 i 4^8, tak aby otrzymać taką samą podstawę potęgi. W tym wypadku będzie to liczba 2.

$$x^y = 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$
$$y^x = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$$

4° Porównujemy potęgi.

$$x^y < y^x$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $x^y < y^x$

ZADANIE 10 — *zadanie sprawdzające*

Porównaj liczby a^b i b^a, gdzie: $a = \left[(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right]^2$, $b = \dfrac{9^{-2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{27}\cdot 27^{-2}}$.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

1

Liczby rzeczywiste

— rozwiązania zadań sprawdzających

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2

ROZWIĄZANIE

Przedstawiamy poszczególne wyrazy w wyrażeniu w postaci potęg o tej samej podstawie równej 2.

$$\frac{\sqrt[4]{16^{-1}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}}{64^{\frac{2}{3}} : (2\sqrt{2})^6} = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\cdot 8^2}{(2^6)^{\frac{2}{3}} : 512} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(2^3)^2}{2^4 : 2^9} = \frac{2^{-1}\cdot 2^6}{2^{-5}} = \frac{2^5}{2^{-5}} = 2^{10} = 1024$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: 1024

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4

ROZWIĄZANIE

Przedstawiamy liczby jako potęgi o tej samej podstawie równej 3.

$$a = (3^3)^{18} = 3^{54}$$

$$b = (3^2)^{27} = 3^{54}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $a = b$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 6

ROZWIĄZANIE

Przedstawiamy liczby jako potęgi o tym samym wykładniku.

$$4^{68} = (4^4)^{17} = 256^{17}$$

$$5^{51} = (5^3)^{17} = 125^{17}$$

$$12^{34} = (12^2)^{17} = 144^{17}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $5^{51} < 12^{34} < 4^{68}$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 8

ROZWIĄZANIE

1° Wyznaczamy takie same czynniki w obu liczbach.

$$x = 6^{20} = (2\cdot 3)^{20} = 2^{20}\cdot 3^{20}$$

$$y = 27^{14} = (3^3)^{14} = 3^{42} = 3^{22}\cdot 3^{20}$$

2° Porównujemy różniące się elementy.

$$2^{20} < 3^{22}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $x < y$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 10

ROZWIĄZANIE

1° Obliczamy wartość a, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$a=\left[(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}+(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right]^2=$$
$$=2-\cancel{\sqrt{3}}+2(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}+2+\cancel{\sqrt{3}}=$$
$$=4+2[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{\frac{1}{2}}=4+2(4-3)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=4+2\sqrt{1}=4+2=6$$

2° Obliczamy wartość b, korzystając z działań na potęgach o tej samej podstawie.

$$b=\frac{9^{-2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{27}\cdot 27^{-2}}=\frac{(3^2)^{-2}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{(3^3)^{\frac{1}{6}}\cdot(3^3)^{-2}}=\frac{3^{-4}\cdot 3^{\cancel{\frac{1}{2}}}}{3^{\cancel{\frac{1}{2}}}\cdot 3^{-6}}=3^2=9$$

3° Zapisujemy potęgi 6^9 i 9^6 i upraszczamy je.

$$a^b=6^9=(2\cdot 3)^9=2^9\cdot 3^9=512\cdot 3^9$$
$$b^a=9^6=(3^2)^6=3^{12}=3^3\cdot 3^9=27\cdot 3^9$$

4° Porównujemy potęgi.

$$a^b>b^a$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $a^b>b^a$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 12

ROZWIĄZANIE

$$P=8\sqrt{c}=8\sqrt{4^{\sqrt{5}+2}}=2^3\cdot(4^{\sqrt{5}+2})^{\frac{1}{2}}=2^3\cdot\left((2^2)^{\sqrt{5}+2}\right)^{\frac{1}{2}}=2^3\cdot 2^{\sqrt{5}+2}=2^{5+\sqrt{5}}=d=L$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 14

ROZWIĄZANIE

1° Rozkładamy wyrażenia, wykorzystując wzory skróconego mnożenia.

$$\sqrt{37-20\sqrt{3}}\quad+\quad\sqrt{28+16\sqrt{3}}=$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\boxed{a^2+b^2}$ $\;2ab$ $\qquad$ $\boxed{c^2+d^2}$ $\;2cd$

$2ab=20\sqrt{3}$ $\qquad$ $2cd=16\sqrt{3}$

$ab=10\sqrt{3}$ $\qquad$ $cd=8\sqrt{3}$

$b=2\sqrt{3}$ $\qquad$ $d=2\sqrt{3}$

$a=5$ $\qquad$ $c=4$

$5^2+(2\sqrt{3})^2=37$ $\qquad$ $4^2+(2\sqrt{3})^2=28$

2° Przekształcamy wyrażenie, korzystając z prawa $\sqrt{a^2}=|a|$.

$$g=\sqrt{(5-2\sqrt{3})^2}+\sqrt{(4+2\sqrt{3})^2}=|5-2\sqrt{3}|+|4+2\sqrt{3}|=$$
$$=5-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}=9=3^2$$

3° Liczba $g=3^2$ jest kwadratem liczby naturalnej.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 16 | 4 pkt | czerwiec 2013

ROZWIĄZANIE

1° Wprowadzamy oznaczenie.

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$$

2° Podnosimy równanie stronami do potęgi trzeciej. Pamiętajmy, że musimy skorzystać ze wzoru: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

ROZWIĄZANIE

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x \quad |^3$$

$$9+\cancel{\sqrt{80}}+3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2+9-\cancel{\sqrt{80}}=x^3$$

3° Porządkujemy i wyłączamy wspólny czynnik z dwóch środkowych wyrazów.

$$18+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)=x^3$$

4° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$18+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)}_{x}=x^3$$

5° Zastępujemy wyrażenie $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$.

$$18+3\sqrt[3]{81-80}\,x=x^3$$
$$18+3x=x^3$$
$$x^3-3x-18=0$$

6° Sprawdzamy, czy liczba $x=3$ jest pierwiastkiem równania.

$3^3-3\cdot3-18=0$, więc $x=3$ jest rozwiązaniem,

czyli $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

7° Zauważmy, że nie musimy szukać ewentualnych pozostałych pierwiastków, ponieważ wyrażenie oznaczone zmienną x miało mieć wartość równą 3 i to wykazaliśmy.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 18

ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy kolejne liczby różniące się o 2.

n — pierwsza liczba całkowita
$n+2$ — druga liczba całkowita

2° Zapisujemy różnicę kwadratów liczb i porządkujemy.

$(n+2)^2-n^2=n^2+2\cdot2\cdot n+2^2-n^2=$

3° Wyłączamy liczbę 4 przed nawias.

$=4(n+1)=$

4° Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy nawias literą k z zapisem, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$=4\cdot\underbrace{(n+1)}_{k\in\mathbb{Z}}=4k$

5° Różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 4 i liczby całkowitej, więc wyrażenie to jest podzielne przez 4.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 20

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru: $a^{2n}-b^{2n}=(a^n-b^n)(a^n+b^n)$.

$11^8-9^8=(11^4-9^4)\cdot(11^4+9^4)=$

2° Ponownie korzystamy z wyżej wymienionego wzoru.

$=(11^2-9^2)\cdot(11^2+9^2)\cdot(11^4+9^4)=$

3° Wykonujemy działania w pierwszym nawiasie.

$=(121-81)\cdot(11^2+9^2)\cdot(11^4+9^4)=$

4° Wyrażenie $(11^2+9^2)\cdot(11^4+9^4)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$=40\cdot\underbrace{(11^2+9^2)\cdot(11^4+9^4)}_{k\in\mathbb{Z}}=40k$

5° Wyrażenie przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 40 i liczby całkowitej, więc jest ono podzielne przez 40.

1 Podsumowanie

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzedniego działu. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

Możesz skorzystać ze wskazówki. To numer zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu. ↓

W zadaniach 1.1 – 1.15 zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

ZAD. P.1.1 (0-1) Dane są liczby $a = 10^7$ i $b = 25^5$. Wynika z tego, że:

A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. $NWD(a;b) = 625$

zobacz zad. 8

ZAD. P.1.2 (0-1) Liczba $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$ jest liczbą:

A. parzystą, B. nieparzystą, C. niewymierną, D. nienależącą do liczb całkowitych.

zobacz zad. 13

ZAD. P.1.3 (0-1) Liczba $15^8 - 13^8$ jest podzielna przez:

A. 3 B. 28 C. 9 D. 52

zobacz zad. 19

ZAD. P.1.4 (0-1) Liczba $8 + 8^2 + 8^3 + \ldots + 8^{50}$ jest podzielna przez:

A. 72 B. 32 C. 16 D. 144

zobacz zad. 30

ZAD. P.1.5 (0-1) Nierówność $|2x-5| > -1$ jest spełniona:

A. dla każdej liczby rzeczywistej,
B. tylko dla liczb dodatnich,
C. tylko dla liczb ujemnych,
D. tylko dla liczb naturalnych.

zobacz zad. 59

ZAD. P.1.6 (0-1) Odwrotność liczby $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{2014}\right)$ jest:

A. podzielna przez 7,
B. liczbą pierwszą,
C. podzielna przez 1007,
D. podzielna przez 11.

zobacz zad. 39

ZAD. P.1.7 (0-1) (maj 2022) Liczba $\log_3\sqrt{27} - \log_{27}\sqrt{3}$ jest równa:

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{12}$ D. 3

Wskazówka: skorzystaj ze wzoru $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ oraz ze wzoru $\log_a b^p = p\log_a b$

ZAD. P.1.8 (0-1) Zbiór $\left[\frac{1}{3};1\right]$ opisuje rozwiązania nierówności:

A. $|3x-1| \geq 0$ B. $|2x+1| \leq 3$ C. $|2+3x| \leq 1$ D. $|3x-2| \leq 1$

zobacz zad. 60

ZAD. P.1.9 (0-1) Liczbą spełniającą równanie $|2x-10| = x$ jest:

A. -10 B. $\frac{3}{10}$ C. $-3\frac{1}{3}$ D. 10

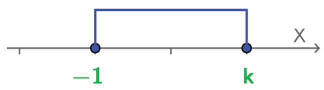
zobacz zad. 58

ZAD. P.1.10 (0-1) Jeśli $a = \log_3 5$, to $\log_{81}125$ jest równy:

A. a^3 B. $\frac{3}{4}a$ C. $\frac{4}{3}a$ D. $\frac{2}{3}a^2$

zobacz zad. 51

zobacz zad. 60 ZAD. P.1.11 (0-1) (maj 2015) Na rysunku przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x-8| \leq 10$.



Stąd wynika, że:

A. $k=2$ B. $k=4$ C. $k=5$ D. $k=9$

zobacz zad. 45 ZAD. P.1.12 (0-1) Liczba $\log_8 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 9$ jest równa:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{8}$

zobacz inf. na s. 9 i 10 ZAD. P.1.13 (0-1) (maj 2018) Dane są liczby: $a=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b=\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c=\sqrt[4]{8}$, $d=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k=2^{-\frac{1}{4}}$. Prawdziwa jest równość:

A. $k=a$ B. $k=b$ C. $k=c$ D. $k=d$

zobacz inf. na s. 23 ZAD. P.1.14 (0-1) (maj 2018) Wartość wyrażenia $2\log_5 10-\frac{1}{\log_{20}5}$ jest równa:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

ZAD. P.1.15 (0-1) (czerwiec 2018) Liczba $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$ jest równa:

A. 1 B. -1 C. $3-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}+1$

wykorzystaj własność $\sqrt[2]{a^2}=|a|$

zobacz zad. 43 ZAD. P.1.16 (0-2) Oblicz wartość wyrażenia $\left(\frac{3}{108}\right)^{-\log_{6\sqrt{6}}64}$.

zobacz zad. 2 ZAD. P.1.17 (0-2) Oblicz $\frac{\left(\sqrt[3]{625}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^2 : 25^{-1}}{\sqrt{125}\cdot 5^{\frac{1}{2}} : 0{,}2^{-1}}$.

zobacz zad. 59 ZAD. P.1.18 (0-2) Rozwiąż nierówność $|2x-67|<155$. Zapisz obliczenia.

zobacz zad. 57 ZAD. P.1.19 (0-2) Rozwiąż równanie $|\log_2 x|=4$. Zapisz obliczenia.

zobacz zad. 30 ZAD. P.1.20 (0-3) Wykaż, że wyrażenie $123+123^2+123^3+\ldots+123^{18}$ jest podzielne przez 15 252.

zobacz zad. 52 ZAD. P.1.21 (0-3) Dana jest liczba $p=\log_5 7$. Zapisz wyrażenie $\log_{125}49$ w postaci wyrażenia algebraicznego.

zobacz zad. 13 ZAD. P.1.22 (0-4) Wykaż, że wyrażenie $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ nie jest liczbą całkowitą.

zobacz zad. 24 ZAD. P.1.23 (0-3) Wykaż, że wyrażenie $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}$ jest podzielne przez 30, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$.

zobacz zad. 29 ZAD. P.1.24 (0-3) Wykaż, że wyrażenie $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^{60}$ jest podzielne przez 7.

zobacz zad. 51 ZAD. P.1.25 (0-3) (czerwiec 2015) Niech $a=\log_{12}2$. Wykaż, że $\log_6 64=\frac{6a}{1-a}$.

zobacz zad. 53 ZAD. P.1.26 (0-3) (czerwiec 2015) Wykaż, że dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby a i dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby b spełniona jest równość $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^9} b}+\frac{1}{\log_{a^{10}} b}=\frac{55}{\log_a b}$.

zobacz zad. 27 ZAD. P.1.27 (0-4) Wykaż, że liczba $k=77^4-5\cdot 77^2+4$ jest podzielna przez 600.

zobacz zad. 34 ZAD. P.1.28 (0-2) Wykaż, że dla $n \in \mathbb{Z}$ wyrażenie n^3-n jest podzielne przez 6.

zobacz zad. 33 i 35 ZAD. P.1.29 (0-2) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n^2+n)(n^2+5n+6)$ jest podzielna przez 24.

Odpowiedzi do zadań znajdują się na stronie 389

Odpowiedzi do podsumowań 1-13

PODSUMOWANIE NR 1

P. 1.1 A	P. 1.2 B	P. 1.3 B	P. 1.4 A	P. 1.5 A	P. 1.6 C	P. 1.7 A	P. 1.8 D	P. 1.9 D	P. 1.10 B

P. 1.11 D P. 1.12 C P. 1.13 A P. 1.14 C P. 1.15 A P. 1.16 256 P. 1.17 3125

P. 1.18 $x \in (-44, 111)$

P. 1.19 $x_1 = 16,\ x_2 = \frac{1}{16}$

P. 1.20
$$123 + 123^2 + 123^3 + 124^4 + \ldots + 123^{17} + 123^{18} =$$
$$= 123(1+123) + 123^3(1+123) + \ldots + 123^{17}(1+123) =$$
$$= 124(123 + 123^3 + \ldots + 123^{17}) = \underbrace{124 \cdot 123}_{15\,252} \cdot \underbrace{(1 + 123^2 + \ldots + 123^{16})}_{k \in \mathbb{Z}} = 15\,252k$$

Wyrażenie jest więc podzielne przez 15 252.

P. 1.21
$$\log_{125} 49 = \frac{\log_5 49}{\log_5 125} = \frac{\log_5 7^2}{3} = \frac{2\log_5 7}{3} = \frac{2p}{3}$$

P. 1.22
$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}+\sqrt{3}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| =$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$$

P. 1.23
$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} = 2^n + 2 \cdot 2^n + 2^2 \cdot 2^n + 2^3 \cdot 2^n = 2^n + 2 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 2^n =$$
$$= 15 \cdot 2^n = 15 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 30 \cdot \underbrace{2^{n-1}}_{k \in \mathbb{Z}} = 30k$$

Liczba jest więc podzielna przez 30.

P. 1.24
$$4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{60} = 4(1+4+4^2) + 4^4(1+4+4^2) + \ldots + 4^{58}(1+4+4^2) =$$
$$= (1+4+16)(4+4^4+\ldots+4^{58}) = 21 \cdot (4+4^4+\ldots+4^{58}) = 7 \cdot \underbrace{3(4+4^4+\ldots+4^{58})}_{k \in \mathbb{Z}} = 7k$$

Liczba jest więc podzielna przez 7.

P. 1.25
$$L = \log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{6\log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \frac{6a}{1-a} = P$$

P. 1.26
$$L = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^9} b} + \frac{1}{\log_{a^{10}} b} =$$
$$= \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \ldots + \log_b a^9 + \log_b a^{10} =$$
$$= \log_b a + 2\log_b a + 3\log_b a + \ldots + 9\log_b a + 10\log_b a = 55\log_b a = \frac{55}{\log_a b} = P$$

P. 1.27 $k = 77^4 - 5 \cdot 77^2 + 4$ Niech $t = 77^2$, więc:
$$k = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) = (77^2-1)(77^2-4) = (77-1)(77+1)(77-2)(77+2) =$$
$$= 76 \cdot 78 \cdot 75 \cdot 79 = 4 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 39 \cdot 75 \cdot 79 = 4 \cdot 2 \cdot 75 \cdot 19 \cdot 39 \cdot 79 = 600 \cdot \underbrace{19 \cdot 39 \cdot 79}_{l \in \mathbb{Z}} = 600l$$

Liczba jest więc podzielna przez 600.

P. 1.28 Przedstawiamy wyrażenie w postaci iloczynu.
$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{6k,\ k \in \mathbb{Z}} = 6k$$

Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, ponieważ co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 2 i dokładnie jeden z czynników jest podzielny przez 3.

P. 1.29 Wyłączamy n przed pierwszy nawias i przekształcamy wyrażenie w drugim nawiasie do postaci iloczynu.

$$(n^2+n)(n^2+5n+6)=n(n+1)(n^2+5n+6)=$$

$$\Delta=25-24=1 \quad \sqrt{\Delta}=1 \quad n_{1,2}=\frac{-5\pm1}{2}=\begin{cases}-3\\-2\end{cases}$$

$$=\underbrace{n(n+1)(n+2)(n+3)}_{24k,\ \ k\in\mathbb{Z}}=24k$$

Otrzymaliśmy iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych, więc liczba jest podzielna przez 24.

PODSUMOWANIE NR 2

P. 2.1 D	P. 2.2 C	P. 2.3 C	P. 2.4 B	P. 2.5 C	P. 2.6 B	P. 2.7 C	P. 2.8 A	P. 2.9 D	P. 2.10 D

P. 2.11 C P. 2.12 C P. 2.13 D P. 2.14 B P. 2.15 B P. 2.16 A P. 2.17 $a=6,\ b=12,\ c=8$

P. 2.18 $m=52,\ n=676$

P. 2.19 $m=116$

P. 2.20 $a=-2,\ b=-9,\ c=18$

P. 2.21

$$x^3-x^2y-xy^2+y^3\le 0$$
$$x^2(x-y)-y^2(x-y)\le 0$$
$$(x-y)(x^2-y^2)\le 0$$
$$(x-y)(x-y)(x+y)\le 0$$
$$\underbrace{(x-y)^2}_{0}\cdot\underbrace{(x+y)}_{4}\le 0$$

Nierówność będzie prawdziwa, gdy $x-y=0$, czyli gdy $x=y$, więc jeśli $x+y=4$, to $x=2$ oraz $y=2$.

P. 2.22 $\begin{cases}m=-3\\n=-4\end{cases}$

P. 2.23 $AAA+AA+A=100A+10A+A+10A+A+A=123A=41\cdot 3A$

Liczba jest więc podzielna przez 41.

P. 2.24 Warunki: $\begin{cases}W(-3)=0\\W(-5)=-36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$

P. 2.25

$$\sqrt{a+b}\ge\sqrt{2\sqrt{ab}} \quad |^2$$
$$a+b\ge 2\sqrt{ab} \quad |^2$$
$$a^2+2ab+b^2\ge 4ab$$
$$a^2-2ab+b^2\ge 0$$
$$\bigwedge_{a,b\in\mathbb{R}_+}(a-b)^2\ge 0$$

P. 2.26 Jeśli $x=1$ jest dwukrotnym rozwiązaniem, to $W(x)$ jest podzielny przez $(x-1)^2=x^2-2x+1$, więc

$$\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$$

P. 2.27

$$x^6+x^4+6x^3+x^2+5>0$$
$$\underbrace{\underbrace{x^6+4x^3+4}_{\substack{(x^3+2)^2\\\ge 0}}+\underbrace{x^4+2x^3+x^2}_{\substack{(x^2+x)^2\\\ge 0}}+1}_{>0}>0$$

P. 2.28 $a-b=2023$

PODSUMOWANIE NR 3

P. 3.1 C	P. 3.2 D	P. 3.3 C	P. 3.4 B	P. 3.5 D	P. 3.6 B	P. 3.7 B	P. 3.8 B	P. 3.9 D	P. 3.10 A

P. 3.11 A P. 3.12 B P. 3.13 A P. 3.14 D P. 3.15 2310 P. 3.16 625 P. 3.17 80,6 P. 3.18 224

Odwiedź nasz fanpage!
„Jak zdać maturę z matematyki”

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI? NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

dla bystrzaków i nie tylko!

W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!

Dariusz Kulma to nauczyciel z ogromnym doświadczeniem w pracy z młodzieżą i wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia.

- Jako **jedyny matematyk był trzykrotnie nagrodzony w ogólnopolskim konkursie Nauczyciel Roku** (pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego”) — w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji”, w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem Nauczyciela Roku 2008.
- W 2008 roku otrzymał **nagrodę Ministra Edukacji Narodowej II stopnia**.
- Jest pomysłodawcą i twórcą projektu **„Matematyka Innego Wymiaru”**, w ramach którego organizowane były Matematyczne Mistrzostwa Polski Dzieci i Młodzieży.
- Jest **autorem piętnastu zbiorów zadań**, w tym dla najmłodszych uczniów z zadaniami z krainy Kwadratolandii.
- Prowadzi **fanpage „Jak zdać maturę z matematyki”**, a także cykliczne webinary pn. „Wielkie Lekcje z Nauczycielem Roku”, w ramach których wspiera tysiące maturzystów w przygotowaniach do matury.
- Jest autorem wielu bestsellerowych książek dla maturzystów, m.in. **„Dowodów Matematycznych”**.
- Jest **autorem programu nauczania matematyki** dla szkół ponadgimnazjalnych opracowanego w ramach projektu „E-laboratorium matematyczne”.
- Od 2021 roku **realizuje projekt MATura+** organizowany wraz z Fundacją Empiria i Wiedza, obejmujący wsparciem w przygotowaniach do matury maturzystów z całej Polski.

„(...) **Autor książki prowadzi uczniów przez gąszcz zagadnień matematycznych w sposób prosty i bezpieczny.** Zastosowany sposób narracji **pozwala spokojnie przejść przez wszystkie najistotniejsze zagadnienia matematyki** szkolnej, nie tylko prezentując gotowe rozwiązania, ale – uwzględniając najnowsze osiągnięcia psychologii i pedagogiki – **dbając o trwałość powtarzanej wiedzy i nabytych umiejętności**.”

Dr Witold Pająk, Honorowy Profesor Oświaty, rzeczoznawca MEN podręczników szkolnych

!

Dzięki wieloletniej pracy z młodzieżą Dariusz Kulma opracował własny system nauczania matematyki oparty m.in. na crash testach, które w znakomity sposób utrwalają wiedzę. Oto kilka opinii o nim.

„Jestem bardzo cudownie zaskoczona tym, że w niecały rok byłam w stanie z pomocą Pana Darka nauczyć się matematyki rozszerzonej. Naprawdę jestem ogromnie wdzięczna i szczęśliwa. Dziękuje <3”

Ania – maturzystka 2023

„Lekcje z Panem Darkiem są super! Zawsze pokazuje szybsze drogi do rozwiązania zadań, których w życiu nie widziałem w szkole. A powtórka przed maturą była przekrojowa. Powtórzyliśmy wszystko, co było możliwe i najważniejsze do matury. Testy bardzo pomagają, jeśli chodzi o powtórkę i przede wszystkim przećwiczenie tego, co nauczyliśmy się na lekcji.”

Kuba – maturzysta 2023

Książki do kompletu, dzięki którym jeszcze lepiej zdasz maturę.

NA CZYM OPIERAMY NASZ SYSTEM?

- **792 ZADANIA** (w tym **456 zadań rozwiązanych “krok po kroku”**) — z matur z poprzednich lat oraz zadania autorskie, w tym **dowody** i **zadania na wykazywanie**.
- **WYĆWICZENIE UMIEJĘTNOŚCI** — specjalnie opracowany system pozwala na dokładne zapoznanie się z poszczególnymi zagadnieniami poprzez zadania do analizy, samodzielnie wykonywane zadania sprawdzające, a następnie podtrzymywanie wiedzy poprzez systematyczne powtórki przy pomocy podsumowań.
- **NAJŁATWIEJSZE SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ** — wszystkie zadania zawierają odpowiedzi i komentarze pozwalające na prześledzenie sposobu rozwiązywania określonego rodzaju zadań.
- **ZADANIA ZGODNE Z AKTUALNĄ PODSTAWĄ PROGRAMOWĄ** — wyjaśniające zagadnienia z materiału obowiązującego obecnie na egzaminie maturalnym.

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-50-0
9 788363 975500
Cena: 69,00 zł

Zamówienia on-line:
www.jakzdacmaturezmatematyki.pl

Zamówienia telefoniczne lub SMS-em:
51-77777-51

Zamówienia e-mail:
elitmat@elitmat.pl

Sprawdź inne książki oraz materiały on-line na naszej stronie