

Ponad 180 000 sprzedanych egzemplarzy

NOWE  
WYDANIE

# JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI ? NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni.

nie tylko dla  
humanistów!



matura 2023 2024  
aktualna podstawa programowa →

**Dariusz Kulma**  
Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz  
odpowiedź →

DARIUSZ KULMA

# JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM



Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni

nie tylko dla  
humanistów!

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2022

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Druk i oprawa:

**Drukarnia "KOLUMB"**

ul. Kaliny 7

41-506 Chorzów

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z [www.fotolia.com](http://www.fotolia.com): © contrastwerkstatt - id. 84950310; © ag visuell - id. 53584856;  
© Dreaming Andy - id. 62704436; © valdis torms - id. 46177828; © Marek - id. 68124775;  
© valdis torms - id. 66702797; © Denis Junker - id. 54171604; © Andrey\_Arkusha - id. 74798374;  
© dengess - id. 42780077; © Lovrencg - id. 51595955; © kharlamova\_lv - id. 47907680;  
© Tomasz Sergej - id. 22916756; © magraphics - id. 412494451; © Sergey Nivens - id. 277853783;

Fotografie z [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com): PublicDomainPictures - id. animal-1717\_640;  
stux - id. origami-210114\_1280; blickpixel - id. cube-570703\_1920

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki

tel. 51-77777-51

e-mail: [elitmat@elitmat.pl](mailto:elitmat@elitmat.pl) , [www.elitmat.pl](http://www.elitmat.pl)

Mińsk Mazowiecki 2022. Wydanie szóste.

ISBN: 978-83-63975-48-7

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy składać przez stronę:

**[www.jakzdacmaturezmatematyki.pl](http://www.jakzdacmaturezmatematyki.pl)**

bądź na adres: [elitmat@elitmat.pl](mailto:elitmat@elitmat.pl)

## ● WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać!

Ponieważ: po pierwsze, poznamy się, a po drugie — wyjaśnię Ci, co, dlaczego, jak i kiedy zrobić, by zdać maturę z matematyki.

### Drogi Maturzysto!

Obowiązkowa matura z matematyki dla niektórych jest czymś prostym i banalnym, dla innych jest jedną z wielkich życiowych traum.

**Co roku kilkadziesiąt tysięcy maturzystów nie zdaje matury, a w rekordowym roku było ich ponad 70 tysięcy! To bardzo dużo. Dlaczego aż tyle?**

Przyczyn jest co najmniej kilka. Ucznia, który nie lubi matematyki i ma problemy z nauczeniem się jej, często paraliżuje strach i lęk przed tym przedmiotem, ponieważ ma wiele negatywnych wspomnień. Nie wiem, jak Ty radziłeś sobie dotychczas z matematyką, ale skoro sięgnąłeś po tę książkę, to również masz jakieś obawy związane z maturą. Może chcesz tylko zdać, a może zależy Ci na jak najwyższym wyniku? Ważne, żebyś odniósł sukces na miarę własnych oczekiwań.



Kilka lat temu postanowiłem napisać książkę „Jak zdać maturę z matematyki”. Chciałem zebrać w niej swoje doświadczenia, które zdobyłem, przygotowując kilkanaście tysięcy uczniów do różnych egzaminów. Chciałem również, by książka łamała stereotypy i pokazywała, że to nieprawda, że matematyki nie da się nauczyć. **Po kilku wydaniach i ponad 180 tysiącach sprzedanych egzemplarzy wiem, że książka spełnia swój cel. Wiele osób mi pisze, że dzięki niej odniosło na maturze sukces.**

Ta wersja książki jest dedykowana maturzystom zdającym maturę w 2023 roku i uczącym się w liceum oraz zdającym w 2024 roku, kiedy już wszystkich będzie obowiązywać nowa formuła matury – zarówno z liceów, jak i techników.

### Dlaczego nauka z tą książką jest skuteczniejsza i czym ta książka różni się od innych?

Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym?” to specjalny system przygotowań oparty na kilku przemyślanych filarach.

**Pierwszy to „łopatologiczne” tłumaczenie zagadnień matematycznych.** Wielu matematyków mogą razić uproszczenia w moich wyjaśnieniach. Jednak dla Ciebie i dla mnie liczy się efekt — masz zdać maturę! Na pewno masz już dość niezrozumiałych sformułowań, z którymi wielokrotnie spotykałeś się na co dzień w szkole. W tej książce nie znajdziesz encyklopedycznych formułek, choć oczywiście są potrzebne wzory, definicje i twierdzenia. Wyjaśnienia mają być proste i konkretne. Dlatego gdy przypominam Ci wzór w części teoretycznej, to od razu możesz zobaczyć, jak taki wzór zastosować na konkretnym przykładzie.

**Drugi filar to specjalny rozkład zadań — zasada trzech kroków. To unikalna cecha tej książki.** Pierwszy krok — zadanie do analizy, w trakcie której poznajesz najprostszy sposób rozwiązania zadania określonego typu. Drugi krok to rozwiązywanie zadania podobnego do analizowanego, ale w oparciu o wskazówki. Nawet, jeśli jesteś pozbawiony matematycznej pewności, zobaczysz, że z podpowiedziami powoli zaczniesz wierzyć, że możesz się nauczyć rozwiązywać poszczególne zadania. Krok trzeci to zadanie sprawdzające — przy jego rozwiązywaniu nie otrzymujesz już pomocy. Musisz w końcu być samodzielny! Szybko zobaczysz, że ten system się sprawdza. Takich zadań z zasadą trzech kroków jest w tej książce 458. Jest ich dużo, ale z reguły są dość krótkie i proste. **Do zadań ze wskazówkami i zadań sprawdzających na końcu danego rozdziału znajdziesz pełne rozwiązania.** Sprawdzaj je. Zobacz, czy gdzieś nie popełniasz jeszcze błędu.

**Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych.** Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghausa i Tony’ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6 – 7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawią się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.**

Podsumowania składają się z zadań zamkniętych – testowych z jedną lub dwiema odpowiedziami, zadań typu „prawda-falsz”, zadań „z ponieważ” oraz zadań otwartych – typowych, jakie znamy lub zadań z luką, którą trzeba uzupełnić. Są to takie typy zadań, jakich możesz spodziewać się w arkuszu maturalnym w nowej formule. Łącznie są to 264 zadania maturalne, które sprawią, że będziesz coraz lepiej przygotowany do rozwiązywania egzaminacyjnych arkuszy. Co ważne, w podsumowaniach znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów — na przykład w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowaniu nr 5 — z poprzednich pięciu. **Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury!** Sam zaskoczysz się, jak dobrze i trwale będziesz wszystko pamiętał. Dodatkowo przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz wskazówki. Najczęściej będzie to numer zadania podobnego, a czasem tylko informacja, gdzie szukać wskazówki. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań.

## Czy ten system działa?

W rekordowym roku moi uczniowie osiągnęli z matury z matematyki średni wynik **91,45%**, który przy średniej ogólnopolskiej — w okolicach 50% — jest, musisz przyznać, dużo lepszy. **Co roku wszyscy moi uczniowie zdają egzamin maturalny, wielu z nich otrzymuje wyniki 100%, a ponad połowa z nich wyniki powyżej 90%!** Książka z tym systemem bije rekordy popularności i dzięki niej spotykam się z wieloma oznakami sympatii i wdzięczności. Jak widzisz, ten system działa i Ty też możesz dołączyć do grupy szczęśliwców.

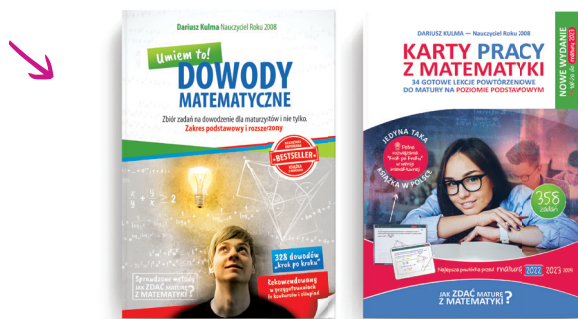
W książce znajdziesz większość najważniejszych typów zadań, jakie mogą wystąpić na maturze. Trudno mówić o zadaniach „pewniakach”, jak na poprzednich maturach, ponieważ dopiero pojawiły się pierwsze przykładowe arkusze maturalne w nowej formule. **Jest jednak pewien kanon umiejętności, które, mimo zmian podstawy programowej, nadal pojawiają się w zadaniach maturalnych. Dlatego świadomie pozostawiłem wiele zadań z matur z lat ubiegłych, ponieważ zawierają zagadnienia, które będą obowiązywać na maturze 2023 czy 2024.**

## Złota zasada pewności zdania egzaminu maturalnego z matematyki

Jeśli masz już tę książkę, to wykonałeś pierwszy duży krok. Kolejne kroki nie muszą być duże, ale ważne, by były SYSTEMATYCZNE! Gdy rozwiązesz zadania zamieszczone w tej książce, będziesz mieć mocny fundament do zdania matury. Musisz być jednak konsekwentny. Dla osób mniej systematycznych przygotowałem dwa harmonogramy, które pomogą w rozplanowaniu pracy. Czas przygotowań rozłożyłem na 10 oraz 42 dni. Oczywiście możesz też przygotowywać się jeszcze wolniej i spokojniej, na przykład przez cały rok szkolny. Tak byłoby nawet najlepiej!

Proszę Cię jeszcze o jedno — nie omijaj żadnych zagadnień. Książka jest całością. Zależności poznawane we wcześniejszych rozdziałach są potrzebne w dalszej części — są niezbędne! Gdy to zrealizujesz, Twój wynik będzie naprawdę dobry. Sam będziesz zaskoczony swoim sukcesem.

Jeśli chcesz otrzymać jeszcze lepszy wynik lub mieć większą pewność na maturze, to warto, żebyś sięgnął po inne moje książki, ale już po „przerobieniu” repetytorium. Pierwsza to „Dowody matematyczne – zbiór zadań dla maturzystów i nie tylko”. Nie bój się dowodów i nie zniechęcaj przy początkowych trudnościach. Te zadania będą Ci bardzo rozwijały, a dodatkowo to świetny trening. Druga książka to „Karty pracy z matematyki - 34 gotowe lekcje powtórzeniowe do matury”. To jedyna książka w Polsce, która dzięki planszom interaktywnym dołączonym do wersji papierowej „sama uczy”! Ostatnim etapem przygotowań niech będą „Arkusze maturalne”. Tam już zobaczysz konkretnie, ile punktów udaje Ci się zdobyć z poszczególnych arkuszy. To najlepszy trening na sam koniec przygotowań do matury.



Powodzenia!

*Dariusz Kulma*

Więcej informacji: [jakzdacmaturezmatematyki.pl/ksiazka](http://jakzdacmaturezmatematyki.pl/ksiazka)



1 LICZBY RZECZYWISTE		str.		
	Wstęp teoretyczny — Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych	11	1	1
	Wstęp teoretyczny — Liczby przeciwne i odwrotne do danej	11	1	1
	Wstęp teoretyczny — Liczby pierwsze i złożone	12	1	1
	Wstęp teoretyczny — Procenty — różne rodzaje obliczeń procentowych	12	1	1
	Zadania — obliczenia procentowe	14	1	1
	Wstęp teoretyczny — Potęgi i pierwiastki	19	1	2
	Zadania — potęgi i pierwiastki	21	1	2
	Zadania — wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka	24	1	2
	Wstęp teoretyczny — Notacja wykładnicza	26	1	3
	Zadania — notacja wykładnicza	26	1	3
	Wstęp teoretyczny — Ułamki okresowe	28	1	3
	Zadania — ułamki okresowe	28	1	3
	Wstęp teoretyczny — Logarytmy	29	1	3
	Zadania — obliczanie logarytmów z definicji	30	1	3
	Zadania — wykorzystanie wzorów dotyczących logarytmów	31	1	3
	Wstęp teoretyczny — Wartość bezwzględna	32	1	4
	Zadania — wartość bezwzględna	33	1	4
	Wstęp teoretyczny — Równania z jedną wartością bezwzględną	34	1	4
	Zadania — równania z jedną wartością bezwzględną	34	1	4
	Wstęp teoretyczny — Nierówności z jedną wartością bezwzględną	35	1	4
	Zadania — nierówności z jedną wartością bezwzględną	35	1	4
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzającymi	40		
	Podsumowanie 1	53	2	5
2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE				
	Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o wyrażeniach algebraicznych	55	2	6
	Wstęp teoretyczny — Wzory skróconego mnożenia	55	2	6
	Zadania — zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	56	2	6
	Zadania — usuwanie niewymierności z mianownika	58	2	6
	Zadania — działania na wyrażeniach algebraicznych	59	2	7
	Zadania — wyłączanie czynnika przed nawias	62	2	7
	Zadania — działania na wyrażeniach wymiernych	63	2	7
	Zadania — rozkład wielomianu na czynniki metodą grupowania	65	2	7
	Wstęp teoretyczny — Podzielność liczb	66	2	8
	Wstęp teoretyczny — Wykazywanie podzielności	67	2	8
	Zadania — dowody dotyczące podzielności liczb	67	2	8
	Wstęp teoretyczny — Podzielność iloczynów kolejnych liczb całkowitych	70	2	8
	Zadania — podzielność iloczynów kolejnych liczb całkowitych	71	2	8
	Zadania — wykazywanie spełniania przez liczbę lub wyrażenie określonych warunków	73	2	9
	Wstęp teoretyczny — Wykazywanie nierówności	74	2	9
	Zadania — wykazywanie nierówności	74	2	9



	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	77		
	Podsumowanie 2	89	3	10
	<b>3 FUNKCJE</b>			
	Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o funkcjach	91	3	11
	Wstęp teoretyczny — Ogólne własności funkcji	91	3	11
	Wstęp teoretyczny — Przekształcenia równoległe wykresu funkcji	92	3	11
	Wstęp teoretyczny — Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych	93	3	11
	Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji liniowej	93	3	11
	Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji kwadratowej	94	3	11
	Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji wykładniczej	95	3	11
	Zadania — funkcje określone za pomocą opisu słownego	95	3	11
	Zadania — wykorzystywanie współrzędnych punktu należącego do wykresu funkcji	96	3	11
	Zadania — obliczanie wartości i argumentów dla danych funkcji	98	3	11
	Zadania — określanie własności funkcji	99	3	12
	Zadania — przekształcanie wykresu funkcji	101	3	12
	Zadania — interpretacja współczynników funkcji liniowej	102	3	12
	Zadania — proste równoległe i prostopadłe	104	3	13
	Zadania — odczytywanie współrzędnych wierzchołka paraboli z wykorzystaniem postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	106	3	13
	Zadania — postać iloczynowa funkcji kwadratowej	109	3	14
	Zadania — określanie własności funkcji kwadratowej	110	3	14
	Zadania — obliczanie pierwiastków równania kwadratowego	112	3	14
	Zadania — najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	114	4	15
	Zadania — wielkości odwrotnie proporcjonalne w zadaniach praktycznych	117	4	15
	Zadania — wykorzystanie własności funkcji do zadań osadzonych w kontekście praktycznym	118	4	15
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	121		
	Podsumowanie 3	139	4	16
	<b>4 RÓWNIANIA I NIERÓWNOŚCI</b>			
	Zadania — sprawdzanie, czy liczba jest rozwiązaniem równania lub nierówności	141	4	17
	Zadania — równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	142	4	17
	Zadania — nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	144	4	17
	Zadania — równania wymierne	146	4	18
	Wstęp teoretyczny — Rodzaje równań kwadratowych — możliwe postaci po uproszczeniu	147	4	18
	Zadania — równania wymierne równe zero	148	4	18
	Zadania — wykorzystanie własności iloczynu do rozwiązywania równań	149	4	18
	Zadania — równania kwadratowe z jedną niewiadomą	151	4	19
	Zadania — rozwiązywanie równań metodą grupowania wyrazów	152	5	19
	Zadania — równania wymierne cz. 2	153	5	19
	Wstęp teoretyczny — Rodzaje nierówności kwadratowych	154	5	19
	Zadania — nierówności kwadratowe	155	5	19
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	157		
	Podsumowanie 4	169	5	20



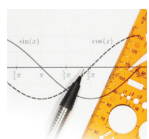
## 5 UKŁADY RÓWNAŃ

Wstęp teoretyczny — Układy równań pierwszego stopnia	171	5	21
Zadania — rozwiązywanie układów równań oraz ich rodzaje	171	5	21
Zadania — zadania tekstowe z wykorzystaniem układu równań	174	5	21
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	179		
Podsumowanie 5	185	5	22



## 6 CIĄGI

Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o ciągach	187	5	23
Wstęp teoretyczny — Ciąg arytmetyczny i geometryczny	187	5	23
Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągów określonych wzorem ogólnym	188	5	23
Wstęp teoretyczny — Monotoniczność ciągów	189	5	23
Zadania — monotoniczność ciągów	190	5	23
Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	191	5	23
Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	192	5	23
Zadania — wyznaczanie liczby wyrazów ciągów spełniających określone warunki	192	5	23
Zadania — zastosowanie wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	194	6	23
Zadania — zastosowanie wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	195	6	24
Zadania — wyznaczanie wzoru ogólnego ciągów	196	6	24
Zadania — wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego	197	6	24
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	203		
Podsumowanie 6	213	6	25



## 7 TRYGNOMETRIA

Wstęp teoretyczny — Najważniejsze wzory i zależności dotyczące funkcji trygonometrycznych	215	6	26
Zadania — obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych z definicji	216	6	26
Zadania — wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji	218	6	26
Zadania — wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej $90^\circ$	219	6	26
Zadania — działania z wykorzystaniem wartości funkcji trygonometrycznych	220	6	26
Zadania — wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi	221	6	27
Wstęp teoretyczny — Twierdzenie cosinusów	224	7	27
Zadania — twierdzenie cosinusów	224	7	27
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	227		
Podsumowanie 7	235	7	28

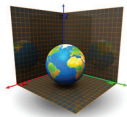


## 8 PLANIMETRIA

Wstęp teoretyczny — Wzory i twierdzenia dotyczące figur geometrycznych	237	7	29
Wstęp teoretyczny — Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów	240	7	29
Zadania — wykorzystanie funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych	241	7	29
Zadania — wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa	242	7	29
Zadania — okręgi wpisane w trójkąt lub kwadrat i okręgi opisane na trójkącie lub kwadracie	244	7	29
Zadania — podobieństwo trójkątów	247	7	30



Zadania — wykorzystanie zależności między kątami środkowym i wpisanym opartymi na tym samym łuku	249	7	30
Wstęp teoretyczny — Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie	253	7	30
Zadania — wykorzystanie twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie	253	7	30
<b>Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających</b>	255		
<b>Podsumowanie 8</b>	265	8	31



## 9 GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA

Wstęp teoretyczny — Długość i środek odcinka, równanie prostej, pole trójkąta	267	8	32
Wstęp teoretyczny — Przekształcenia w układzie współrzędnych	268	8	32
Zadania — wykorzystanie wzoru na odległość dwóch punktów	268	8	32
Zadania — wykorzystanie wzoru na wyznaczenie współrzędnych środka odcinka	269	8	32
Zadania — wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez dwa punkty	270	8	32
Zadania — wyznaczenie prostej przechodzącej przez dwa punkty	271	8	32
Zadania — wyznaczenie wzoru symetralnej odcinka	272	8	32
Zadania — wykorzystanie własności współczynnika kierunkowego prostej	273	8	33
Zadania — przekształcenia w układzie współrzędnych	274	8	33
Zadania — pozostałe zadania z geometrii kartezjańskiej	275	8	33
Wstęp teoretyczny — Równanie okręgu w postaci kanonicznej	278	8	33
Zadania — równanie okręgu w postaci kanonicznej	278	8	33
Wstęp teoretyczny — Odległość punktu od prostej	279	8	33
Zadania — wykorzystanie wzoru na odległość punktu od prostej	279	8	33
<b>Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających</b>	281		
<b>Podsumowanie 9</b>	291	8	34



## 10 STEREOMETRIA

Wstęp teoretyczny — Najważniejsze wzory dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów	293	9	35
Zadania — wykorzystanie podstawowych wzorów dotyczących sześcianu	294	9	35
Zadania — wykorzystanie podstawowych wzorów dotyczących prostopadłościanu	295	9	35
Zadania — zależność między liczbą krawędzi, wierzchołków i ścian ostrosłupów oraz graniastosłupów	296	9	35
Zadania — wykorzystanie zależności wynikających z podstawowych wzorów dotyczących brył	297	9	35
Zadania — rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami	298	9	35
<b>Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających</b>	303		
<b>Podsumowanie 10</b>	309	9	36



## 11 KOMBINATORYKA

Wstęp teoretyczny — Kombinatoryka	311	9	37
Zadania — zastosowanie reguły mnożenia	311	9	37
Zadania — zastosowanie reguły dodawania	313	9	37
Zadania — pozostałe zadania kombinatoryczne	314	9	37
<b>Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających</b>	315		
<b>Podsumowanie 11</b>	318	9	38



## 12 RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Wstęp teoretyczny — Statystyka — najważniejsze wzory i definicje	320	10	39
Zadania — średnia arytmetyczna, mediana, odchylenie standardowe	321	10	39
Wstęp teoretyczny — Rachunek prawdopodobieństwa	326	10	40
Zadania — wykorzystanie własności prawdopodobieństwa	326	10	40
Zadania — prawdopodobieństwo klasyczne	327	10	40
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	333		
Podsumowanie 12	341	10	41



## 13 OPTYMALIZACJA

Zadania optymalizacyjne, które można opisać funkcją kwadratową	343	10	42
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	346		
Podsumowanie 13	348	10	42
Odpowiedzi do podsumowań 1-13	350		

## INSTRUKCJA OBSŁUGI KSIĄŻKI

Drogi Maturzysto, przeczytałeś już wstęp?

Nie? To zapraszamy do przeczytania, dowiesz się z niego wiele o tej książce, co ułatwi zrozumienie instrukcji.

Tak? Poniżej znajdują się objaśnienia poszczególnych oznaczeń, z którymi spotkasz się podczas rozwiązywania zadań.

**Zadania** ← Oznaczenie zadań określonego typu lub dotyczących jednego zagadnienia.

**zadanie do analizy** ← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzami objaśniającymi poszczególne etapy rozwiązania.

**zadanie ze wskazówkami** ← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania w oparciu o podane wskazówki.

**zadanie sprawdzające** ← Zadania podobne do zadań do analizy i ze wskazówkami, do samodzielnego rozwiązania.

**informator CKE/CKE** ← Propozycje zadań Centralnej Komisji Egzaminacyjnej z informatora lub innych materiałów CKE

**marzec 2022** ← Zadania z matur CKE z lat ubiegłych, które obowiązują w nowej formule matury.

**Rozwiązania** ← Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających, znajdujące się na kolejnych stronach.

**warto wiedzieć...** ← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań.

**Cena brutto = 100%** ← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania, znajdujące się na zielonym tle przy rozwiązaniu.

**Jak zdać... 01** ← Porady ułatwiające organizację nauki oraz sam proces uczenia się.

# 1

## Liczby rzeczywiste



### Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
LICZBY NATURALNE	Liczby 0, 1, 2, 3, 4... to liczby naturalne. Literą $\mathbb{N}$ będziemy oznaczać <b>zbiór liczb naturalnych</b> .	0; 3; 10; 99; 1037
LICZBY CAŁKOWITE	Literą $\mathbb{Z}$ oznaczamy <b>zbiór liczb całkowitych</b> . Liczby całkowite zawierają liczby naturalne oraz liczby przeciwne do nich.	0; 3; 10; 99; 1037 -1; -2; -5; -87
LICZBY WYMIERNE	Literą $\mathbb{W}$ oznaczamy <b>zbiór liczb wymiernych</b> . Liczbą wymierną nazywamy liczbę, którą można przedstawić jako nieskracalny ułamek zwykły o postaci $\frac{p}{q}$ , gdzie $p$ i $q$ to liczby całkowite oraz $q \neq 0$ .	0; 3; 10; 99; 1037 -1; -2; -5; -87 $-1\frac{1}{2}; 5,3; 0,(3) = \frac{1}{3}$ Liczby: $\frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \frac{34}{68}$ to przykłady różnych reprezentacji tej samej liczby wymiernej.
LICZBY NIETYMIERNE	Liczby, które nie są wymierne (tzn. nie można ich przedstawić w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego), noszą nazwę <b>liczb niewymiernych</b> . Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy symbolem $\mathbb{NW}$ .	$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{17}, -3\sqrt{5}$
LICZBY RZECZYWISTE	Wszystkie liczby, którymi się posługujesz, tworzą <b>zbiór liczb rzeczywistych</b> . Oznaczamy go literą $\mathbb{R}$ .	

### Liczby przeciwne i odwrotne do danej

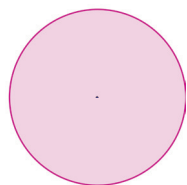
	DEFINICJA	PRZYKŁAD
LICZBY PRZECIWNE	Liczbą <b>przeciwną</b> do liczby $a$ jest liczba $-a$ .	Liczbą przeciwną do 3 jest liczba $-3$ . Liczbą przeciwną do 0 jest liczba 0. Liczbą przeciwną do $-\frac{1}{2}$ jest liczba $\frac{1}{2}$ .
LICZBY ODWROTNE	Liczbą <b>odwrotną</b> do liczby $a$ jest liczba $\frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$ .	Liczbą odwrotną do 2 jest liczba $\frac{1}{2}$ . Liczbą odwrotną do $-\frac{2}{3}$ jest liczba $-\frac{3}{2}$ .

## Liczby pierwsze i złożone

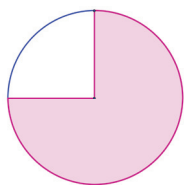
	DEFINICJA	PRZYKŁAD
LICZBY PIERWSZE	Liczbę naturalną $p$ nazywamy <b>liczbą pierwszą</b> , jeśli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynkę i samą siebie. Liczbami pierwszymi są np. 2, 3, 5, 7, 11 ...	Liczba 2 jest liczbą pierwszą, ponieważ jest liczbą naturalną większą od 1 oraz posiada dwa różne dzielniki: 1 oraz 2.  Liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ posiada więcej dzielników niż dwa; jej dzielniki to: 1, 2, 3, 6.
LICZBY ZŁOŻONE	Liczbę $z$ nazywamy <b>liczbą złożoną</b> , gdy jest iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych.	Liczba 6 jest liczbą złożoną, ponieważ możemy ją zapisać: $6 = 2 \cdot 3$ , a liczby 2 oraz 3 są liczbami pierwszymi.  Liczba 30 jest również liczbą złożoną, gdyż możemy ją zapisać: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , a liczby 2, 3 oraz 5 są liczbami pierwszymi.  Liczbę złożoną możemy również rozpoznać po tym, że posiada więcej niż dwa różne dzielniki. Liczba 9 jest liczbą złożoną, gdyż ma trzy dzielniki: 1, 3, 9.

## Procenty – różne rodzaje obliczeń procentowych

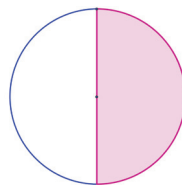
	DEFINICJA
PROCENT	Wyraz <b>procent</b> pochodzi od łacińskiego „pro centum”, czyli „na sto”. 1% danej liczby $a$ to 0,01 z tej liczby, co obliczamy w następujący sposób: $0,01 \cdot a$ .



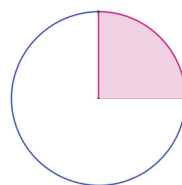
$$100\% = 1$$



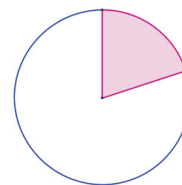
$$75\% = \frac{3}{4}$$



$$50\% = \frac{1}{2}$$



$$25\% = \frac{1}{4}$$



$$20\% = \frac{1}{5}$$

	DEFINICJA
PROMIL	<b>Promil</b> (1‰) danej liczby $a$ to 0,001 tej liczby, co obliczamy w następujący sposób: $0,001 \cdot a$ .

### PROPORCJE PROSTE

Bardzo wygodnym sposobem rozwiązywania zadań z obliczeniami procentowymi jest stosowanie proporcji prostych.

PRZYKŁAD	
30% uczniów klasy IB uczęszcza na kurs języka angielskiego, co stanowi 9 osób. Ilu uczniów jest w tej klasie?	Jakim procentem liczby 120 jest liczba 48?
$30\% \rightarrow 9 \text{ osób}$ $100\% \rightarrow x \text{ osób}$ $30x = 9 \cdot 100$ $30x = 900 \quad   : 30$ $x = 30$	$100\% \rightarrow 120$ $x\% \rightarrow 48$ $120x = 100 \cdot 48$ $120x = 4800 \quad   : 120$ $x = 40\%$

Taki sposób rozwiązywania proporcji możemy określić jako mnożenie „na skos”.

## RODZAJ 1 OBLICZANIE PROCENTU Z LICZBY

PRZYKŁAD	OBLICZENIA
Oblicz 27% z liczby 500.	$0,27 \cdot 500 = 135$

## RODZAJ 2 OBLICZANIE LICZBY, GDY DANY JEST JEJ PROCENT

PRZYKŁAD	OBLICZENIA
Pierwsza rata spłaty pożyczki za samochód stanowi 9% wartości samochodu, co daje kwotę 2 880 zł. Oblicz całkowity koszt samochodu.	$9\% \rightarrow 2880 \text{ zł}$ $100\% \rightarrow x$ <hr/> $9x = 100 \cdot 2880$ $9x = 288\,000 \text{ zł} \quad   : 9$ $x = 32\,000 \text{ zł}$

## RODZAJ 3 JAKIM PROCENTEM JEDNEJ LICZBY JEST DRUGA LICZBA

PRZYKŁAD	OBLICZENIA
Jakim procentem liczby 150 jest liczba 48?	$100\% \rightarrow 150$ $x\% \rightarrow 48$ <hr/> $150x = 100 \cdot 48$ $150x = 4800 \quad   : 150$ $x = 32\%$

## RODZAJ 4 WIELOKROTNA ZMIANA WARTOŚCI (NP. CEN)

PRZYKŁAD	OBLICZENIA
Cenę pewnego towaru obniżono o 20%, a następnie jeszcze o 30%. O ile procent została obniżona cena towaru?	<p>Cena w procentach po pierwszej obniżce:  <math>100\% - 20\% = 80\%</math> ceny początkowej.</p> <p>Cena w procentach po drugiej obniżce:  <math>100\% - 30\% = 70\%</math> nowej ceny.</p> <p>Po dwóch obniżkach otrzymujemy 70% z 80% ceny początkowej, czyli:  <math>70\% \cdot 80\% = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56 = 56\%</math> ceny początkowej.</p> <p>Cenę towaru obniżono o <math>100\% - 56\% = 44\%</math>.</p>

## RODZAJ 5 OBLICZANIE PODATKU VAT

PRZYKŁAD	OBLICZENIA
Rower kosztuje 1353 zł. Oblicz cenę netto roweru, jeśli podatek VAT wynosi 23%.	$123\% \rightarrow 1353 \text{ zł}$ $100\% \rightarrow x$ <hr/> $123x = 1353 \cdot 100$ $123x = 135\,300 \text{ zł} \quad   : 123$ $x = 1100 \text{ zł}$
Cena brutto = 100% ceny netto + stawka podatku VAT	

## RODZAJ 6 OBLICZENIA DOTYCZĄCE LOKAT I FUNDUSZY

PRZYKŁAD	
12 000 zł wpłacono na lokatę dwuletnią o oprocentowaniu 6% i półrocznej kapitalizacji. Oblicz zysk z tej lokaty.	
OBLICZENIA — METODA 1	OBLICZENIA — METODA 2
	Korzystamy ze wzoru na procent składany: $K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

1° Oprocentowanie na pół roku: $6\% : 2 = 3\%$	1° Oprocentowanie na pół roku: $6\% : 2 = 3\% \rightarrow p = 3$
2° Po pierwszym okresie kapitalizacji zgromadzony kapitał to 100% kwoty początkowej oraz 3% odsetek uzyskanych za pierwsze półrocze, czyli łącznie: $100\% + 3\% = 103\%$	2° Liczba okresów kapitalizacji w czasie trwania lokaty: $n = 4$
3° Po każdym kolejnym okresie kapitalizacji zgromadzony kapitał to 103% wartości kapitału przed tym okresem.	3° Kwota początkowa: $K = 12\ 000$ .
4° W czasie trwania lokaty są 4 okresy kapitalizacji odsetek, więc kapitał końcowy wynosi $103\% \cdot 103\% \cdot 103\% \cdot 103\% \cdot 12\ 000$ , czyli: $(103\%)^4 \cdot 12\ 000 = 1,03^4 \cdot 12\ 000 \approx 13\ 506,11\ \text{zł}$ ZYSK: $13\ 506,11\ \text{zł} - 12\ 000\ \text{zł} = 1506,11\ \text{zł}$	$K_n = 12\ 000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 12\ 000 \cdot 1,03^4 \approx 13\ 506,11\ \text{zł}$ ZYSK: $13\ 506,11\ \text{zł} - 12\ 000\ \text{zł} = 1506,11\ \text{zł}$

### RODZAJ 7 O ILE PROCENT WIĘCEJ, O ILE PROCENT MNIEJ

PRZYKŁAD		OBLICZENIA
Partia XYZ ma 30-procentowe poparcie wyborcze, a partia QD 20-procentowe poparcie wyborcze.	1. O ile procent większe poparcie ma partia XYZ od poparcia dla partii QD?	$100\% \rightarrow 20\%$ $x\% \rightarrow 30\%$ <hr/> $20x = 30 \cdot 100$ $20x = 3000 \quad   : 20$ $x = 150\%$
O ile % więcej $\rightarrow$ mniejsza wartość równa się 100%. O ile % mniej $\rightarrow$ większa wartość równa się 100%.		Poparcie dla partii XYZ jest większe o 50% od poparcia dla partii QD.
Punkty procentowe to różnica dwóch wartości procentowych.	2. O ile punktów procentowych mniejsze poparcie ma partia QD?	$30\% - 20\% = 10$ punktów procentowych Poparcie dla partii QD jest mniejsze o 10 punktów procentowych od poparcia dla partii XYZ.

## ● Zadania — obliczenia procentowe

ZADANIE 1	zadanie do analizy	1 pkt
-----------	--------------------	-------

Na premierę filmową sprzedano 320 biletów, w tym 144 ulgowe. Jaki procent sprzedanych biletów stanowiły bilety ulgowe?

A. 69%

B. 40%

C. 45%

D. 31%

### ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 3 obliczeń procentowych.

1° Wszystkich biletów jest 320, więc jest to 100%.

$$100\% \rightarrow 320$$

2° Biletów ulgowych jest 144, więc jest to  $x\%$  z całej liczby biletów.

$$x\% \rightarrow 144$$

3° Powstałą proporcję mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$320x = 100 \cdot 144$$

$$320x = 14\ 400 \quad | : 320$$

$$x = 45\%$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

## ZADANIE 2

zadanie ze wskazówkami

1 pkt

CKE

W klasie jest cztery razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ile procent wszystkich uczniów tej klasy stanowią dziewczęta?

A. 4%

B. 5%

C. 20%

D. 25%

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 3 obliczeń procentowych.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

2° Wszyscy uczniowie stanowią 100%.

3° Dziewczęta stanowią  $x\%$  wszystkich uczniów.

4° Powstałą proporcję mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

## ZADANIE 3

zadanie sprawdzające

1 pkt

Na parkingu stoi 45 samochodów, z których 27 jest koloru niebieskiego. Jaki procent wszystkich samochodów stanowią samochody niebieskie?

A. 55%

B. 60%

C. 39,7%

D. 65%

## ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

## ZADANIE 4

zadanie do analizy

1 pkt

Prowizja pobrana od udzielonego kredytu wynosi 2,5%, co stanowi 3500 zł. Wynika stąd, że udzielono kredytu w wysokości:

A. 750 zł

B. 1400 zł

C. 140 000 zł

D. 87,50 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 2 obliczeń procentowych.

1° Prowizja to 2,5% z kwoty, której nie znamy, czyli z udzielonego kredytu. Prowizja wynosi 3500 zł.

2° Układamy proporcję.

$$2,5\% \rightarrow 3500 \text{ zł}$$

$$100\% \rightarrow x \text{ zł}$$

3° Mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$2,5x = 100 \cdot 3500$$

$$2,5x = 350\,000 \quad | : 2,5$$

$$x = 140\,000 \text{ zł}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

## ZADANIE 5

zadanie ze wskazówkami

1 pkt

Pierwsza rata, która stanowi 12% ceny roweru, jest równa 192 zł. Rower kosztuje:

A. 1760 zł

B. 1600 zł

C. 1920 zł

D. 2304 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 2 obliczeń procentowych.

1° Pierwsza rata to 12% z kwoty, której nie znamy, czyli z ceny roweru.

Pierwsza rata wynosi.....zł

2° Układamy proporcję.

3° Mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

## ZADANIE 6

zadanie sprawdzające

1 pkt

Bлуza po obniżce ceny o 30% kosztuje 105 zł. Wynika z tego, że bluza przed obniżką kosztowała:

A. 73,50 zł

B. 150 zł

C. 315 zł

D. 285,71 zł

## ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

## ZADANIE 7

zadanie do analizy

1 pkt

Cena albumu bez podatku VAT wynosi 96 zł. Album ten wraz z podatkiem VAT w wysokości 5% kosztuje:

A. 100,80 zł

B. 91,20 zł

C. 91,43 zł

D. 101 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 5 obliczeń procentowych.

1° Cena brutto, czyli wraz z podatkiem VAT, to suma 100% ceny netto oraz stawki podatku VAT.

$$100\% + 5\% = 105\%$$

2° Układamy proporcję.

$$100\% \rightarrow 96 \text{ zł}$$

$$105\% \rightarrow x \text{ zł}$$

3° Mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$100x = 96 \cdot 105$$

$$100x = 10\,080 \quad | : 100$$

$$x = 100,80 \text{ zł}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A





# 1

## Liczby rzeczywiste

— rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających



### Rozwiązania — obliczenia procentowe

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2	1 pkt	CKE
-----------------------	-------	-----

W klasie jest cztery razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ile procent wszystkich uczniów tej klasy stanowią dziewczęta?

- A. 4%                      B. 5%                      C. 20%                      D. 25%

#### ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 3 obliczeń procentowych.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

$n$  — liczba dziewcząt  
 $4n$  — liczba chłopców  
 $n + 4n = 5n$  — liczba wszystkich uczniów

2° Wszyscy uczniowie stanowią 100%.

$100\% \rightarrow 5n$

3° Dziewczęta stanowią  $x\%$  wszystkich uczniów.

$x\% \rightarrow n$

4° Powstałą proporcję mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$\begin{array}{l} 5nx = 100n \quad | : 5n \\ x = 20\% \end{array}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

ROZWIĄZANIE ZADANIA 3	1 pkt	
-----------------------	-------	--

Na parkingu stoi 45 samochodów, z których 27 jest koloru niebieskiego. Jaki procent wszystkich samochodów stanowią samochody niebieskie?

- A. 55%                      B. 60%                      C. 39,7%                      D. 65%

#### ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 3 obliczeń procentowych.

1° Wszystkich samochodów jest 45, więc jest to 100%.

$100\% \rightarrow 45$

2° Samochodów niebieskich jest 27, więc jest to  $x\%$  wszystkich samochodów.

$x\% \rightarrow 27$

3° Powstałą proporcję mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$\begin{array}{l} 45x = 100 \cdot 27 \\ 45x = 2700 \quad | : 45 \\ x = 60\% \end{array}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

ROZWIĄZANIE ZADANIA 5	1 pkt	
-----------------------	-------	--

Pierwsza rata, która stanowi 12% ceny roweru, jest równa 192 zł. Rower kosztuje:

- A. 1760 zł                      B. 1600 zł                      C. 1920 zł                      D. 2304 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 2 obliczeń procentowych.

1° Pierwsza rata to 12% z kwoty, której nie znamy, czyli z ceny roweru.

Pierwsza rata wynosi 192 zł.

2° Układamy proporcję.

$$12\% \rightarrow 192 \text{ zł}$$

$$100\% \rightarrow x \text{ zł}$$


---

3° Mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$12x = 100 \cdot 192$$

$$12x = 19\,200 \quad | : 12$$

$$x = 1600 \text{ zł}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

## ROZWIĄZANIE ZADANIA 6

1 pkt

Bluza po obniżce ceny o 30% kosztuje 105 zł. Wynika z tego, że bluza przed obniżką kosztowała:

A. 73,50 zł

B. 150 zł

C. 315 zł

D. 285,71 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 2 obliczeń procentowych.

1° Kwota 105 zł po 30-procentowej obniżce to 70% ceny początkowej.

$$100\% - 30\% = 70\%$$

2° Układamy proporcję.

$$70\% \rightarrow 105 \text{ zł}$$

$$100\% \rightarrow x \text{ zł}$$


---

3° Mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$70x = 100 \cdot 105$$

$$70x = 10\,500 \quad | : 70$$

$$x = 150 \text{ zł}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

## ROZWIĄZANIE ZADANIA 8

1 pkt

Podatek VAT w wysokości 23% zawarty w cenie telewizora wynosi 552 zł. Cena netto telewizora wynosi:

A. 2952 zł

B. 2400 zł

C. 1848 zł

D. 678,96 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 5 obliczeń procentowych.

Skoro cena brutto to suma 100% ceny netto oraz stawki podatku VAT, to:

1° Kwota podatku VAT, czyli 552 zł stanowi 23%.

$$23\% \rightarrow 552 \text{ zł}$$

2° Kwota netto, czyli  $x$  zł stanowi 100%.

$$100\% \rightarrow x \text{ zł}$$


---

3° Mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$23x = 100 \cdot 552$$

$$23x = 55\,200 \quad | : 23$$

$$x = 2400 \text{ zł}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

## ROZWIĄZANIE ZADANIA 9

1 pkt

Cena brutto pewnego towaru wynosi 810 zł, a cena netto 750 zł. Stawka podatku VAT, jaką opodatkowany jest ten towar, to:

A. 5%

B. 7%

C. 23%

D. 8%

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 5 obliczeń procentowych.

1° Obliczamy kwotę podatku VAT.

$$810 - 750 = 60 \text{ zł}$$

2° Kwota netto, czyli 750 zł, to 100%.

$$100\% \rightarrow 750 \text{ zł}$$

3° Kwota podatku, czyli 60 zł, to x% kwoty netto.

$$x\% \rightarrow 60 \text{ zł}$$

4° Powstałą proporcję mnożymy „na skos” i rozwiązujemy równanie.

$$750x = 100 \cdot 60$$

$$750x = 6000 \quad | : 750 \Rightarrow x = 8\%$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

## ROZWIĄZANIE ZADANIA 11

1 pkt

CKE

Cena towaru została podwyższona o 30%, a po pewnym czasie nową, wyższą cenę ponownie podwyższono, tym razem o 10%. W rezultacie obu podwyżek wyjściowa cena towaru zwiększyła się o:

A. 15%

B. 20%

C. 40%

D. 43%

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 4 obliczeń procentowych.

1° Po pierwszej podwyżce o 30% cena towaru wynosi:  $100\% + 30\% = 130\%$  ceny początkowej

2° Po drugiej podwyżce o 10% cena towaru wynosi:  $100\% + 10\% = 110\%$  nowej ceny

3° Po dwóch podwyżkach cena towaru wynosi:  $130\% \cdot 110\% = 1,3 \cdot 1,1 = 1,43 = 143\%$  ceny początkowej

4° Czyli cenę towaru podniesiono o:  $143\% - 100\% = 43\%$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

## ROZWIĄZANIE ZADANIA 12

1 pkt

Komputer kosztował 3500 zł. Sprzedawca obniżył cenę najpierw o 10%, a potem jeszcze o 30%. Komputer kosztuje teraz:

A. 2100 zł

B. 2555 zł

C. 2625 zł

D. 2205 zł

## ROZWIĄZANIE

Jest to RODZAJ 4 obliczeń procentowych.

1° Po pierwszej obniżce o 10% komputer kosztował  $100\% - 10\% = 90\%$   $90\% \cdot 3500$  ceny początkowej.

2° Po drugiej obniżce o 30% komputer kosztował  $100\% - 30\% = 70\%$   $70\% \cdot 90\% \cdot 3500 =$  nowej ceny, co zapisujemy łącznie.

3° Wykonujemy obliczenia.  $= 0,7 \cdot 0,9 \cdot 3500 = 2205 \text{ zł}$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

## Rozwiązania — wykorzystanie wzorów dotyczących logarytmów

ROZWIĄZANIE ZADANIA 50

1 pkt

maj 2010

Liczba  $\log_4 8 + \log_4 2$  jest równa:

A. 1

B. 2

C.  $\log_4 6$ D.  $\log_4 10$ 

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru:  $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ .

$$\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 (8 \cdot 2) = \log_4 16 =$$

2° Korzystamy z definicji logarytmu:  $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ .

$$= 2, \text{ ponieważ } 4^2 = 16$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

ROZWIĄZANIE ZADANIA 51

1 pkt

Liczba  $\log_5 4 + \log_5 1,25$  jest równa:

A. 0

B. 1

C.  $\log_5 5,25$ 

D. -1

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru:  $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ .

$$\log_5 4 + \log_5 1,25 = \log_5 (4 \cdot 1,25) = \log_5 5 =$$

2° Korzystamy ze wzoru:  $\log_a a = 1$ .

$$= 1$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

## Rozwiązania — wartość bezwzględna

ROZWIĄZANIE ZADANIA 53

1 pkt

Liczba  $|8 - 2| + |3 - 6|$  jest równa:

A. 9

B. 2

C. 3

D. -2

ROZWIĄZANIE

1° Najpierw obliczamy wartości wewnątrz modułów, tak jak w nawiasach.

$$|8 - 2| + |3 - 6| = |6| + |-3| =$$

2° Korzystamy z definicji, czyli liczby ujemne zmieniamy na dodatnie, a pozostałym liczbom nie zmieniamy znaku i wykonujemy obliczenia.

$$= 6 + 3 = 9$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ROZWIĄZANIE ZADANIA 54

1 pkt

Liczba  $|3 - 9| + |1 - 2| + |4 - 5|$  jest równa:

A. 4

B. 8

C. -4

D. -8

ROZWIĄZANIE

1° Najpierw obliczamy wartości wewnątrz modułów, tak jak w nawiasach.

$$|3 - 9| + |1 - 2| + |4 - 5| =$$

$$= |-6| + |-1| + |-1| =$$

2° Korzystamy z definicji, czyli liczby ujemne zmieniamy na dodatnie, a pozostałym liczbom nie zmieniamy znaku i wykonujemy obliczenia.

$$= 6 + 1 + 1 = 8$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

## 1

## Podsumowanie

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzedniego działu. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

Możesz skorzystać ze wskazówki. To numer zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu. ↓

ZAD. P. 1.1 (0-1) Rower kosztował 2500 zł. Początkową cenę roweru najpierw obniżono o 20%, a potem jeszcze raz o 20%. Po tych obniżkach rower kosztował: zobacz zad. 10

- A. 1500 zł                      B. 1600 zł                      C. 1640 zł                      D. 1450 zł

ZAD. P. 1.2 (0-1) Iloczyn  $25^3 \cdot 125^2$  jest równy: zobacz zad. 19

- A.  $5^{36}$                       B.  $5^{12}$                       C.  $5^{10}$                       D.  $5^{25}$

ZAD. P. 1.3 (0-1) Liczba  $\log_3 4,5 + \log_3 2$  jest równa: zobacz zad. 50

- A.  $\log_3 6,5$                       B. 3                      C. 2                      D.  $\log_3 2 \frac{1}{4}$

ZAD. P. 1.4 (0-1)(CKE) Liczba  $3^{\frac{9}{4}}$  jest równa: zobacz inf. na s. 20

- A.  $3 \cdot \sqrt[4]{3}$                       B.  $9 \cdot \sqrt[4]{3}$                       C.  $27 \cdot \sqrt[4]{3}$                       D.  $3^9 \cdot 3^{\frac{1}{4}}$

ZAD. P. 1.5 (0-1)(CKE) Wskaż równość prawdziwą: zobacz inf. na s. 20

- A.  $-256^2 = (-256)^2$                       B.  $256^3 = (-256)^3$                       C.  $\sqrt{(-256)^2} = -256$                       D.  $\sqrt[3]{-256} = -\sqrt[3]{256}$

ZAD. P. 1.6 (0-1) Podatek VAT w wysokości 23% zawarty w cenie tabletu wynosi 414 zł. Cena netto tabletu wynosi: zobacz zad. 8

- A. 1800 zł                      B. 2214 zł                      C. 1386 zł                      D. 1704,78 zł

ZAD. P. 1.7 (0-1) Samochód po obniżce o 15% kosztuje 35 700 zł. Cena początkowa samochodu wynosiła: zobacz zad. 6

- A. 41 055 zł                      B. 42 000 zł                      C. 30 345 zł                      D. 40 000 zł

ZAD. P. 1.8 (0-1) Pierwsza rata za samochód, wynosząca 1800 zł, stanowi 5% całkowitej ceny samochodu, który kosztuje: zobacz zad. 5

- A. 18 000 zł                      B. 36 000 zł                      C. 32 000 zł                      D. 28 000 zł

ZAD. P. 1.9 (0-1)(czerwiec 2013) Liczba  $\log 4 + \log 5 - \log 2$  jest równa: zobacz zad. 49 i zad. 50

- A. 10                      B. 2                      C. 1                      D. 0

ZAD. P. 1.10 (0-1) Liczba  $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}$  jest równa: zobacz zad. 20

- A. 3                      B. 9                      C. 27                      D.  $3\sqrt{3}$

ZAD. P. 1.11 (0-1)(CKE) Wskaż liczbę, która spełnia równanie  $4^x = 9$ . zobacz inf. na s. 29

- A.  $\log 9 - \log 4$                       B.  $\frac{\log 2}{\log 3}$                       C.  $2 \log_9 2$                       D.  $2 \log_4 3$

zobacz zad. 45 ZAD. P.1.12 (0-1) Iloczyn  $6 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 64$  jest równy:

- A. 12                      B. 8                      C. -12                      D. -36

Skorzystaj ze wzorów str. 19-20

ZAD. P.1.13 (0-1) **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wartość wyrażenia  $(\sqrt{6\frac{1}{4}} + 2^{-1})^{-3}$  jest równa:

- A.  $\frac{1}{9}$                       B.  $\frac{1}{27}$                       C. 27                      D.  $10\frac{1}{2}$

zobacz inf. na s. 20 ZAD. P.1.14 (0-1) (sierpień 2014) Liczba  $\frac{1}{2} \cdot 2^{2014}$  jest równa:

- A.  $2^{2013}$                       B.  $2^{2012}$                       C.  $2^{1007}$                       D.  $1^{2014}$

zobacz zad. 44 ZAD. P.1.15 (0-1) (czerwiec 2014) Dane są liczby:  $a = \log_3 \frac{1}{9}$ ,  $b = \log_3 3$ ,  $c = \log_3 \frac{1}{27}$ . Który z poniższych warunków jest prawdziwy?

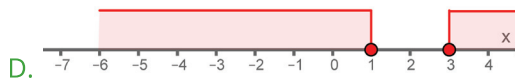
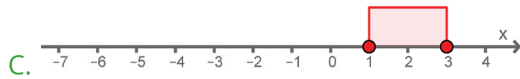
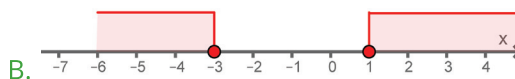
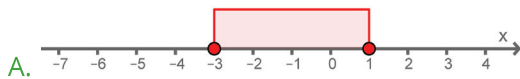
- A.  $c < b < a$                       B.  $b < c < a$                       C.  $a < c < b$                       D.  $c < a < b$

zobacz zad. 26 ZAD. P.1.16 (0-1) (czerwiec 2014) Liczba  $\frac{3^{27} + 3^{26}}{3^{26} + 3^{25}}$  jest równa:

- A. 1                      B. 3                      C. 6                      D. 9

zobacz zad. 60 ZAD. P.1.17 (0-1) (marzec 2022) Spośród rysunków A-D wybierz ten, na którym prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność:

$$|x + 1| \leq 2$$



zobacz inf. na s. 14 ZAD. P.1.18 (0-1) Cena czekolady w sklepie A wynosi 3 zł, a w sklepie B 3,60 zł. W sklepie B cena czekolady jest wyższa od ceny w sklepie A o:

- A. 60%                      B. 20%                      C.  $16\frac{2}{3}\%$                       D. 30%

zobacz zad. 6 ZAD. P.1.19 (0-1) Kurtka po obniżce o 15% kosztuje 476 zł. Cena początkowa kurtki wynosiła:

- A. 547,40 zł                      B. 560 zł                      C. 491 zł                      D. 404,60 zł

zobacz zad. 43 ZAD. P.1.20 (0-1) Liczba  $\log_{36} 216$  jest równa:

- A. 6                      B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D.  $-\frac{2}{3}$

zobacz inf. na s. 13-14 ZAD. P.1.21 (0-1) (maj 2015) Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa:

- A.  $1000 \cdot (1 - \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100})$     B.  $1000 \cdot (1 + \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100})$     C.  $1000 \cdot (1 + \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100})$     D.  $1000 \cdot (1 - \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100})$



# Odpowiedzi do podsumowań 1-13



## PODSUMOWANIE NR 1

P. 1.1 B P. 1.2 B P. 1.3 C P. 1.4 B P. 1.5 D P. 1.6 A P. 1.7 B P. 1.8 B P. 1.9 C P. 1.10 B  
 P. 1.11 D P. 1.12 D P. 1.13 B P. 1.14 A P. 1.15 D P. 1.16 B P. 1.17 A P. 1.18 B P. 1.19 B P. 1.20 C  
 P. 1.21 C

## PODSUMOWANIE NR 2

P. 2.1 C P. 2.2 D P. 2.3 C P. 2.4 B P. 2.5 B P. 2.6 D P. 2.7 C P. 2.8 A P. 2.9 B P. 2.10 D  
 P. 2.11 B P. 2.12 B P. 2.13 A P. 2.14 C P. 2.15 A P. 2.16 C P. 2.17 D P. 2.18 C P. 2.19 D

P. 2.20  $(n+2)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot 2 \cdot n + 2^2 - n^2 = 4n + 4 = 4 \cdot \underbrace{(n+1)}_{k \in \mathbb{Z}} = 4k$  Wyrażenie jest podzielne przez 4.

P. 2.21  $4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+1} - 4^n = 4^n \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^n \cdot 4 - 4^n = 16 \cdot 4^n + 12 \cdot 4^n - 4^n = 27 \cdot \underbrace{4^n}_{k \in \mathbb{Z}} = 27k$  Liczba jest podzielna przez 27.

P. 2.22  $(4n+1)^2 - (4m-1)^2 =$   
 $= (4n)^2 + 2 \cdot 4n + 1^2 - [(4m)^2 - 2 \cdot 4m + 1^2] =$   
 $= 16n^2 + 8n + 1 - (16m^2 - 8m + 1) =$   
 $= 16n^2 + 8n + 1 - 16m^2 + 8m - 1 =$   
 $= 16n^2 + 8n - 16m^2 + 8m =$   
 $= 8 \cdot (2n^2 + n - 2m^2 + m) =$   
 $= 8 \cdot \underbrace{(2n^2 + n - 2m^2 + m)}_{k \in \mathbb{Z}} = 8k$

Liczba jest podzielna przez 8.

P. 2.23  $\frac{k^2 + 6k + 25}{k+3} \geq 8 \quad | \cdot (k+3)$   
 $k^2 + 6k + 25 \geq 8(k+3)$   
 $k^2 + 6k + 25 \geq 8k + 24$   
 $k^2 - 2k + 1 \geq 0$   
 $(k-1)^2 \geq 0$

Dla każdego  $k \in \mathbb{R}_+$  wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

P. 2.24  $a^4 \geq b(2a^2 - b)$   
 $a^4 \geq 2a^2b - b^2$

$a^4 - 2a^2b + b^2 \geq 0$   
 $(a^2 - b)^2 \geq 0$

Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  i  $b$  wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

## PODSUMOWANIE NR 3

P. 3.1 D P. 3.2 B P. 3.3 D P. 3.4 A P. 3.5 B P. 3.6 D P. 3.7 D P. 3.8 C P. 3.9 C P. 3.10 B  
 P. 3.11 C P. 3.12 B P. 3.13 A P. 3.14 C P. 3.15 D P. 3.16 A P. 3.17 D

P. 3.18  $5^{10} + 2 \cdot 5^9 + 5^8 = 5^8(5^2 + 2 \cdot 5 + 1) = 5^8(25 + 10 + 1) = 36 \cdot \underbrace{5^8}_{k \in \mathbb{Z}} = 36k$  Liczba jest więc podzielna przez 36.

P. 3.19  $n$  — pierwsza liczba całkowita  $n+2$  — trzecia liczba całkowita  
 $n+1$  — druga liczba całkowita  $n+3$  — czwarta liczba całkowita  
 $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 =$   
 $= 4n^2 + 12n + 12 + 2 = 4 \underbrace{(n^2 + 3n + 3)}_{k \in \mathbb{Z}} + 2 = 4k + \underbrace{2}_{\text{reszta}}$

P. 3.20  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$   
 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \quad | \cdot 4$

$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$   
 $2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \geq 0$   
 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$   
 $(a-b)^2 \geq 0$

Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  i  $b$  wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.





Odwiedź nasz fanpage!  
„Jak zdać maturę z matematyki”

# JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI? NA POZIMIE PODSTAWOWYM

nie tylko dla humanistów!



W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!

**Dariusz Kulma** to nauczyciel z ponad 25-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in.:

- ✓ nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia w 2008 roku,
- ✓ jako jedyny matematyk trzykrotnie nagrodzony w ogólnopolskim konkursie Nauczyciel Roku (pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego”) — w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji”, w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem Nauczyciela Roku 2008.

— w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji”, w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem Nauczyciela Roku 2008.

- ✓ Jest pomysłodawcą i twórcą projektu **Matematyka Innego Wymiaru** — zrzeszającego ponad 20 tysięcy uczniów w kraju.
- ✓ Jest autorem piętnastu zbiorów zadań, w tym dla najmłodszych uczniów z zadaniami z krainy Kwadratolandii.
- ✓ Prowadzi fanpage „Jak zdać maturę z matematyki?”, pomagając w rozwiązywaniu zadań, udzielając porad i wskazówek przedmaturalnych.
- ✓ Jest pomysłodawcą **Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży** oraz autorem zadań konkursowych.
- ✓ Jest autorem programu nauczania matematyki dla szkół ponadpodstawowych opracowanego w ramach projektu E-laboratorium matematyczne.

„(...) Autor książki prowadzi uczniów przez gęszcz zagadnień matematycznych w sposób prosty i bezpieczny. Zastosowany sposób narracji pozwala spokojnie przejść przez wszystkie najistotniejsze zagadnienia matematyki szkolnej, nie tylko prezentując gotowe rozwiązania, ale — uwzględniając najnowsze osiągnięcia psychologii i pedagogiki — dbając o trwałość powtarzanej wiedzy i nabytych umiejętności.”

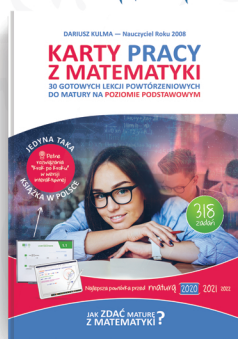
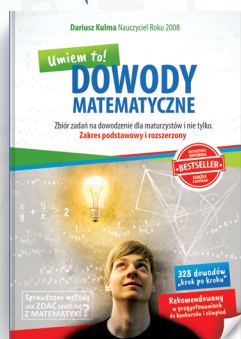
Dr Witold Pająk, Honorowy Profesor Oświaty, rzeczoznawca MEN podręczników szkolnych

Dzięki wieloletniej pracy z młodzieżą Dariusz Kulma opracował własny system nauczania matematyki, dzięki któremu, jak twierdzą jego uczniowie, można polubić, a przede wszystkim zrozumieć ten przedmiot. Prowadzi zajęcia z maturzystami zarówno na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym. Skuteczność tych metod potwierdzają wyniki jego uczniów. W rekordowym roku osiągnęli oni średni wynik **91,45%** (przy średniej ogólnopolskiej ok. 50%). Co roku wszyscy jego uczniowie zdają egzamin maturalny, wielu z nich **otrzymuje wyniki 100%**, a ponad połowa z nich wyniki powyżej 90%!

**OD DZIŚ, DZIĘKI TEJ KSIĄŻCE, RÓWNIEŻ I TY MOŻESZ NALEŻEĆ DO GRONA OSÓB, KTÓRE OSIĄGNĘŁY SUKCES NA MATURZE!**

Bestseller! Zbiór zadań maturalnych na dowodzenie

Interaktywne karty pracy



## NA CZYM OPIERAMY NASZ SYSTEM?

- ✓ **722 ZADANIA** — z matur z poprzednich lat oraz zadań autorskich, w tym **458 zadań rozwiązanych krok po kroku** oraz 264 zadania zawarte w podsumowaniach.
- ✓ **NAJŁATWIEJSZE SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ** — wszystkie zadania zawierają odpowiedzi i komentarze pozwalające na prześledzenie sposobu rozwiązywania określonego rodzaju zadań.
- ✓ **WYĆWICZENIE UMIEJĘTNOŚCI** — specjalnie opracowany system pozwala na dokładne zapoznanie się z poszczególnymi zagadnieniami poprzez zadania do analizy, samodzielnie wykonywane zadania sprawdzające, a następnie podtrzymywanie wiedzy poprzez systematyczne powtórki przy pomocy podsumowań.

Książki do kompletu, dzięki którym jeszcze lepiej zdasz maturę.



**ELITMAT**  
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-48-7



9 788363 975487

Cena 69,00 zł



Zamówienia on-line:  
[www.jakzdacmaturezmatematyki.pl](http://www.jakzdacmaturezmatematyki.pl)



Zamówienia telefoniczne lub SMS-em:  
51-7777-51



Zamówienia e-mail:  
[elitmat@elitmat.pl](mailto:elitmat@elitmat.pl)

Sprawdź inne książki oraz materiały on-line na naszej stronie