Ponad 100 000 sprzedanych egzemplarzy

NOWE WYDANIE

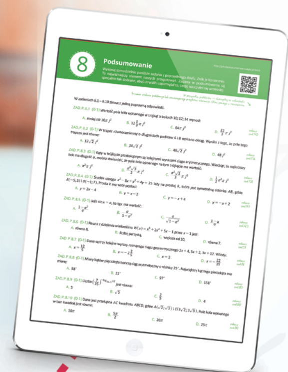
JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI?
NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni.

nie tylko dla humanistów!

Najczęściej wybierana książka
BESTSELLER
podczas przygotowań do matury

PAKIET ON-LINE



677 zadań

matura
aktualna podstawa programowa
2019 2020 2021 2022

Dariusz Kulma
Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz odpowiedź

DARIUSZ KULMA

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM?

Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni

nie tylko dla humanistów!

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2018

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak, Ewelina Trębacz**

Druk i oprawa:
Drukarnia "KOLUMB"
ul. Kaliny 7
41-506 Chorzów

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl , www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2018. Wydanie piąte.

ISBN: 978-83-63975-32-6

WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać!

Ponieważ: po pierwsze, poznamy się, a po drugie — wyjaśnię Ci, co, dlaczego, jak i kiedy zrobić, by zdać maturę z matematyki.

Drogi Maturzysto!

Obowiązkowa matura z matematyki dla niektórych jest czymś prostym i banalnym, dla innych jest jedną z wielkich życiowych traum. Tych drugich jest jednak zdecydowanie więcej.

Co roku kilkadziesiąt tysięcy maturzystów nie zdaje matury, a w rekordowym roku było ich ponad 70 tysięcy! To bardzo dużo. Dlaczego aż tyle?

Przyczyn jest co najmniej kilka. Ucznia, który nie lubi matematyki i ma problemy z nauczeniem się jej często paraliżuje strach i lęk przed tym przedmiotem, ponieważ ma wiele negatywnych wspomnień związanych z jego dotychczasową nauką. Nie wiem, jak Ty radziłeś sobie z matematyką na różnych etapach Twojej edukacji, ale skoro sięgnąłeś po tę książkę, to również masz jakieś obawy związane z tym egzaminem. Może chcesz tylko zdać, a może zależy Ci na jak najwyższym wyniku? Tego nie wiem, ale ważne, żebyś odniósł sukces na miarę własnych oczekiwań.

Kilka lat temu postanowiłem napisać książkę „Jak zdać maturę z matematyki". Chciałem zebrać w niej swoje najważniejsze doświadczenia, które zdobyłem przygotowując kilkanaście tysięcy uczniów do różnego rodzaju egzaminów na różnych poziomach edukacyjnych. Chciałem również, by ta książka łamała stereotypy i pokazywała, że to nieprawda, że matematyki nie da się nauczyć. Po kilku wydaniach i ponad 100 tysiącach sprzedanych egzemplarzy wiem, że książka spełnia swój cel. Wiele osób mi pisze, że dzięki tej książce odniosło na maturze sukces.

Dlaczego nauka z tą książką jest skuteczniejsza i czym ta książka różni się od innych?

Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym?" to specjalny system przygotowań oparty na kilku przemyślanych filarach.

Pierwszy to „łopatologiczne" tłumaczenie zagadnień matematycznych. Wielu matematyków mogą razić uproszczenia w moich wyjaśnieniach. Jednak dla Ciebie i dla mnie liczy się efekt — masz zdać maturę! Na pewno masz już dość niezrozumiałych sformułowań, z którymi wielokrotnie spotykałeś się na co dzień w szkole. W tej książce nie znajdziesz encyklopedycznych formułek, choć oczywiście są potrzebne wzory, definicje i twierdzenia. Wyjaśnienia mają być proste i konkretne. Dlatego gdy przypominam Ci wzór w części teoretycznej, to od razu możesz zobaczyć, jak taki wzór zastosować na konkretnym przykładzie.

Drugi filar to specjalny rozkład zadań — zasada trzech kroków. To unikalna cecha tej książki. Pierwszy krok — zadanie do analizy, w trakcie której poznajesz najprostszy sposób rozwiązania zadania określonego typu. Drugi krok to rozwiązywanie zadania podobnego do analizowanego, ale w oparciu o wskazówki. Nawet, jeśli jesteś pozbawiony matematycznej pewności, zobaczysz, że z podpowiedziami powoli zaczniesz wierzyć, że możesz się nauczyć rozwiązywać poszczególne zadania. Krok trzeci to zadanie sprawdzające — przy jego rozwiązywaniu nie otrzymujesz już pomocy, lecz tylko odpowiedź. Musisz w końcu być samodzielny! Szybko zobaczysz, że ten system się sprawdza. Takich zadań z zasadą trzech kroków jest w tej książce 443. Jest ich dużo, ale z reguły są dość krótkie i proste. Do zadań ze wskazówkami i zadań sprawdzających na końcu danego rozdziału znajdziesz pełne rozwiązania. Sprawdzaj je. Zobacz, czy gdzieś nie popełniasz jeszcze błędu.

Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych. Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghausa i Tony'ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6 – 7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawią się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.**

Podsumowania składają się z zadań testowych oraz zadań otwartych krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi, czyli tak jak w typowym arkuszu maturalnym. Łącznie są to 234 zadania maturalne, które sprawią, że będziesz miał coraz trwalej opanowane umiejętności. Co ważne, w podsumowaniach tych znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów; na przykład w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowaniu nr 5 — z poprzednich pięciu. **Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury!** Sam zaskoczysz się jak dobrze i trwale będziesz wszystko pamiętał. Dodatkowo przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz wskazówki. Najczęściej będzie to numer zadania podobnego, a czasem tylko informacja, gdzie szukać wskazówki. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań, a nawet rozwiązania krok po kroku, gdy zadanie jest dowodem lub innym zadaniem na wykazywanie. W innych książkach, gdy spotykamy dowody, najczęściej nie ma odpowiedzi ani żadnego rozwiązania. W tej książce jest inaczej.

Czy ten system działa?

W rekordowym roku moi uczniowie osiągnęli z matury z matematyki średni wynik **91,45%**, który przy średniej ogólnopolskiej — w okolicach 50% — jest, musisz przyznać, dużo lepszy. **Co roku wszyscy moi uczniowie zdają egzamin maturalny, wielu z nich otrzymuje wyniki 100%, a ponad połowa z nich wyniki powyżej 90%!** Książka z tym systemem bije rekordy popularności i dzięki niej spotykam się z wieloma oznakami sympatii i wdzięczności. Jak widzisz, ten system działa i Ty też możesz dołączyć do grupy szczęśliwców.

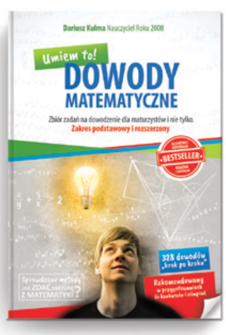
W książce znajdziesz większość najważniejszych typów zadań, jakie mogą znaleźć się na maturze. Trudno mówić o zadaniach „pewniakach", jak na poprzednich maturach, ponieważ od roku 2015 matura przygotowywana jest według nowej podstawy programowej. Jest jednak pewien kanon umiejętności, które mimo zmian podstawy programowej nadal będą pojawiały się w zadaniach maturalnych. Ta książka pomoże Ci opanować właśnie te najważniejsze umiejętności, byś mógł je skutecznie wykorzystać na maturze. Ten kanon umiejętności potwierdzają zamieszczone w książce wybrane zadania maturalne z konkretnych lat czy zadania zaproponowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną (CKE). Tym zadaniom przyglądaj się szczególnie.

Złota zasada pewności zdania egzaminu maturalnego z matematyki

Jeśli masz już tę książkę, to wykonałeś pierwszy duży krok. Kolejne kroki nie muszą być duże, ale ważne, by były SYSTEMATYCZNE! Gdy rozwiążesz zadania zamieszczone w tej książce, będziesz mieć mocny fundament do zdania matury. Musisz być jednak konsekwentny. Dla osób mniej systematycznych przygotowałem dwa harmonogramy, które pomogą im w rozplanowaniu pracy. Czas przygotowań rozłożyłem na 10 oraz 42 dni. Oczywiście możesz też przygotowywać się jeszcze wolniej i spokojniej, na przykład przez cały rok szkolny. Tak byłoby nawet najlepiej. Wszystko zależy od tego, ile czasu zostało Ci do matury.

Proszę Cię jeszcze o jedno — nie omijaj żadnych zagadnień, które będą obowiązywały na Twojej maturze. Książka jest całością. Zależności poznawane we wcześniejszych rozdziałach są potrzebne w dalszej części — są niezbędne! Gdy to zrealizujesz, Twój wynik będzie naprawdę dobry. Sam będziesz zaskoczony swoim sukcesem.

Jeśli chcesz **otrzymać jeszcze lepszy wynik lub mieć większą pewność na maturze**, to warto, żebyś sięgnął po dwie inne moje książki, ale już po „przerobieniu" repetytorium. Pierwsza to **„Dowody matematyczne – zbiór zadań dla maturzystów i nie tylko"**. W arkuszu maturalnym takich zadań znajdziemy co najmniej kilka. Nie bój się dowodów i nie zniechęcaj przy początkowych trudnościach. Te zadania będą Cię bardzo rozwijały, a dodatkowo to świetny trening. Druga książka to **„Jak zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym – arkusze maturalne"**. Są to gotowe arkusze przypominające budową zestawy egzaminacyjne. To dobry trening na sam koniec przygotowań przed maturą.



Powodzenia!

SPIS TREŚCI

Harmonogram przygotowań do matury w:

	str.	10 dni	42 dni
1 LICZBY RZECZYWISTE			
Wstęp teoretyczny — Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych	11	1	1
Wstęp teoretyczny —	11	1	1
Wstęp teoretyczny —	12	1	1
Wstęp teoretyczny —	12	1	1
Zadania — obliczeni	14	1	1
Wstęp teoretyczny – P	19	1	2
Zadania — potęgi i p	21	1	2
Zadania — wyłączan	24	1	2
Wstęp teoretyczny —	26	1	2
Zadania — notacja w	26	1	2
Wstęp teoretyczny — U	28	1	2
Zadania — ułamki okresowe	28	1	2
Wstęp teoretyczny — Logarytmy	29	1	3
Zadania — obliczanie logarytmów z definicji	30	1	3
Zadania — wykorzystanie wzorów dotyczących logarytmów	31	1	3
Wstęp teoretyczny — Błąd bezwzględny i względny	32	1	4
Zadania — wartość bezwzględna	33	1	4
Zadania — błąd bezwzględny	34	1	4
Zadania — błąd względny	35	1	4
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	36		
Podsumowanie 1	49	1	5

numer dnia

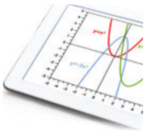
OPTYMALNY PLAN POWTÓREK

Przygotowanie planu pracy to podstawa powtórek maturalnych, dlatego zrobiliśmy to już za Ciebie.

*W zależności od tego, jakim czasem dysponujesz, możesz wybrać wariant **10-dniowy** lub **42-dniowy**.*

Przerabiając książkę zgodnie z harmonogramem, zdążysz z powtórzeniem wszystkich potrzebnych zagadnień, bo wiesz dokładnie, ile zajmie Ci to czasu.

	str.	10 dni	42 dni
2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE			
Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o wyrażeniach algebraicznych	51	2	6
Wstęp teoretyczny — Wzory skróconego mnożenia	51	2	6
Zadania — zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	52	2	6
Zadania — usuwanie niewymierności z mianownika	54	2	6
Zadania — działania na wyrażeniach algebraicznych	55	2	7
Zadania — wyłączanie czynnika przed nawias	58	2	7
Zadania — działania na wyrażeniach wymiernych	59	2	7
Wstęp teoretyczny — Podzielność liczb	61	2	8
Wstęp teoretyczny — Wykazywanie podzielności	62	2	8
Zadania — dowody dotyczące podzielności liczb	62	2	8
Zadania — wykazywanie spełniania przez liczbę lub wyrażenie określonych warunków	65	2	8
Wstęp teoretyczny — Wykazywanie nierówności	66	2	9
Zadania — wykazywanie nierówności	66	2	9
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	69		
Podsumowanie 2	79	2	10



3 FUNKCJE

Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o funkcjach	81	3	11
Wstęp teoretyczny — Ogólne własności funkcji	81	3	11
Wstęp teoretyczny — Przekształcenia równoległe wykresu funkcji	82	3	11
Wstęp teoretyczny — Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych	83	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji liniowej	83	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji kwadratowej	84	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji wykładniczej	85	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$	85	3	11
Zadania — funkcje określone za pomocą opisu słownego	86	3	11
Zadania — wykorzystywanie współrzędnych punktu należącego do wykresu funkcji	87	3	11
Zadania — obliczanie wartości i argumentów dla danych funkcji	89	3	11
Zadania — określanie własności funkcji	90	3	12
Zadania — przekształcanie wykresu funkcji	92	3	12
Zadania — interpretacja współczynników funkcji liniowej	93	3	13
Zadania — proste równoległe i prostopadłe	94	3	13
Zadania — odczytywanie współrzędnych wierzchołka paraboli z wykorzystaniem postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	96	3	14
Zadania — postać iloczynowa funkcji kwadratowej	100	3	14
Zadania — określanie własności funkcji kwadratowej	101	3	14
Zadania — obliczanie pierwiastków równania kwadratowego	102	3	15
Zadania — najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	104	3	15
Zadania — wielkości odwrotnie proporcjonalne w zadaniach praktycznych	108	3	15
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	110		
Podsumowanie 3	127	4	16

4 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

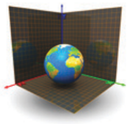
Zadania — sprawdzanie, czy liczba jest rozwiązaniem równania lub nierówności	129	4	17
Zadania — równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	130	4	17
Zadania — nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	132	4	17
Zadania — równania wymierne	134	4	18
Wstęp teoretyczny — Rodzaje równań kwadratowych — możliwe postaci po uproszczeniu	135	4	18
Zadania — równania wymierne równe zero	136	4	18
Zadania — wykorzystanie własności iloczynu do rozwiązywania równań	137	4	18
Zadania — równania kwadratowe z jedną niewiadomą	139	4	19
Wstęp teoretyczny — Rodzaje nierówności kwadratowych	141	4	19
Zadania — nierówności kwadratowe	142	4	19
Wstęp teoretyczny — Układy równań pierwszego stopnia	144	4	20
Zadania — rozwiązywanie układów równań oraz ich rodzaje	144	4	20
Zadania — zadania tekstowe	147	4	21

Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	155		
Podsumowanie 4	175	5	22

5 CIĄGI			
Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o ciągach	177	5	23
Wstęp teoretyczny – Ciąg arytmetyczny i geometryczny	177	5	23
Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągów określonych wzorem ogólnym	178	5	23
Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	179	5	23
Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	180	5	23
Zadania — wyznaczanie liczby wyrazów ciągów spełniających określone warunki	180	5	23
Zadania — zastosowanie wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	182	5	24
Zadania — zastosowanie wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	183	5	24
Zadania — wyznaczanie wzoru ogólnego ciągów	184	5	24
Zadania — wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego	185	5	24
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	191		
Podsumowanie 5	201	6	25

6 TRYGONOMETRIA			
Wstęp teoretyczny — Najważniejsze wzory i zależności dotyczące funkcji trygonometrycznych	203	6	26
Zadania — obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych z definicji	204	6	26
Zadania — wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji	207	6	26
Zadania — wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90°	208	6	26
Zadania — działania z wykorzystaniem wartości funkcji trygonometrycznych	209	6	26
Zadania — wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi	210	6	26
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	214		
Podsumowanie 6	221	7	27

7 PLANIMETRIA			
Wstęp teoretyczny — Wzory i twierdzenia dotyczące figur geometrycznych	223	7	28
Wstęp teoretyczny — Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów	226	7	28
Zadania — wykorzystanie funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych	227	7	28
Zadania — wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa	228	7	28
Zadania — okręgi wpisane w trójkąt lub kwadrat i okręgi opisane na trójkącie lub kwadracie	230	7	29
Zadania — podobieństwo trójkątów	233	7	29
Zadania — wykorzystanie zależności między kątami środkowym i wpisanym opartymi na tym samym łuku	235	7	30
Zadania — dowody geometryczne	239	7	30
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	242		
Podsumowanie 7	253	8	31



8	**GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA**			
	Wstęp teoretyczny — Długość i środek odcinka, równanie prostej, pole trójkąta	255	8	32
	Wstęp teoretyczny — Przekształcenia w układzie współrzędnych	256	8	32
	Zadania — wykorzystanie wzoru na odległość dwóch punktów	256	8	32
	Zadania — wykorzystanie wzoru na wyznaczanie współrzędnych środka odcinka	257	8	32
	Zadania — wyznaczanie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez dwa punkty	258	8	32
	Zadania — wyznaczanie prostej przechodzącej przez dwa punkty	259	8	32
	Zadania — wyznaczanie wzoru symetralnej odcinka	260	8	32
	Zadania — wykorzystanie własności współczynnika kierunkowego prostej	261	8	33
	Zadania — przekształcenia w układzie współrzędnych	262	8	33
	Zadania — pozostałe zadania z geometrii kartezjańskiej	263	8	33
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	267		
	Podsumowanie 8	275	8	34

9	**STEREOMETRIA**			
	Wstęp teoretyczny — Najważniejsze wzory dotyczące graniastosłupów, ostrosłupów i brył obrotowych	277	9	35
	Zadania — wykorzystanie podstawowych wzorów dotyczących sześcianu	279	9	35
	Zadania — wykorzystanie podstawowych wzorów dotyczących prostopadłościanu	280	9	35
	Zadania — zależność między liczbą krawędzi, wierzchołków i ścian ostrosłupów oraz graniastosłupów	281	9	35
	Zadania — wykorzystanie zależności wynikających z podstawowych wzorów dotyczących brył	282	9	36
	Zadania — rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami	285	9	36
	Zadania — wykorzystanie funkcji trygonometrycznych i twierdzenia Pitagorasa do obliczeń z bryłami	286	9	37
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	291		
	Podsumowanie 9	301	9	38

10	**STATYSTYKA, PRAWDOPODOBIEŃSTWO I KOMBINATORYKA**			
	Wstęp teoretyczny — Statystyka — najważniejsze wzory i definicje	303	10	39
	Zadania — średnia arytmetyczna, mediana, odchylenie standardowe	304	10	39
	Wstęp teoretyczny — Kombinatoryka	309	10	40
	Zadania — zastosowanie reguły mnożenia	309	10	40
	Zadania — zastosowanie reguły dodawania	311	10	40
	Zadania — pozostałe zadania kombinatoryczne	312	10	40
	Wstęp teoretyczny — Rachunek prawdopodobieństwa	313	10	41
	Zadania — wykorzystanie własności prawdopodobieństwa	313	10	41
	Zadania — prawdopodobieństwo klasyczne	314	10	41
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	320		
	Podsumowanie 10	331	10	42
	Odpowiedzi do podsumowań 1-10	333		

INSTRUKCJA OBSŁUGI KSIĄŻKI

Drogi Maturzysto, przeczytałeś już wstęp?
Nie? To zapraszamy do przeczytania, dowiesz się z niego wiele o tej książce, co ułatwi zrozumienie instrukcji.
Tak? Poniżej znajdują się objaśnienia poszczególnych oznaczeń, z którymi spotkasz się podczas rozwiązywania zadań.

- **Zadania** ← Oznaczenie zadań określonego typu lub dotyczących jednego zagadnienia.

- **zadanie do analizy** ← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzami objaśniającymi poszczególne etapy rozwiązania.
- **zadanie ze wskazówkami** ← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania w oparciu o podane wskazówki.
- **zadanie sprawdzające** ← Zadania podobne do zadań do analizy i ze wskazówkami, do samodzielnego rozwiązania.

- **CKE** ← Propozycje zadań Centralnej Komisji Egzaminacyjnej do matury według nowej podstawy programowej.
- **maj 2014** ← Zadania z matur z lat ubiegłych.

- **Rozwiązania** ← Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających, znajdujące się na kolejnych stronach.

- **warto wiedzieć...** ← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań.
- **Cena brutto = 100%** ← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania, znajdujące się na zielonym tle przy rozwiązaniu.

- **Jak zdać... 01** ← Porady ułatwiające organizację nauki oraz sam proces uczenia się.

- **Podsumowanie** ← Podsumowujące zadania testowe oraz zadania otwarte obejmujące zagadnienia z działu, po którym się znajdują oraz działów poprzednich. Np. Podsumowanie 6 zawiera zadania z trygonometrii oraz zagadnienia z poprzednich pięciu działów. Każde podsumowanie ma swój indywidualny kod QR przekierowujący do wersji on-line.

UNIKALNY KOD DOSTĘPU

*W każdej książce znajduje się **unikalny kod uprawniający do skorzystania z pakietu on-line**.*

Wystarczy, że wpiszesz go na stronie i możesz skorzystać ze specjalnego modułu podsumowań, który sprawdzi Twoje odpowiedzi i obliczy liczbę zdobytych punktów.

I jeszcze jedno...
Poniżej znajduje się kod zapewniający dostęp do PAKIETU ON
STREFY MATURZYSTY (poprzez kod QR lub wpisując adres w

jakzdacmaturezmatematy

KOD DOSTĘPU

Wykazywanie podzielności

PODZIELNOŚĆ — WPROWADZENIE

Jeśli chcemy wykazać, że wyrażenie jest podzielne przez 7, to należy to wyrażenie przedstawić jako iloczyn liczby 7 i liczby całkowitej.

$14 = 2 \cdot 7$	liczba jest podzielna przez 7
$70 = 10 \cdot 7$	liczba jest podzielna przez 7
$1638 = 234 \cdot 7$	liczba jest podzielna przez 7

Zauważmy, że każdą liczbę podzielną przez 7 możemy rozłożyć na iloczyn liczby 7 i określonej liczby całkowitej, której wartość nie jest dla nas istotna. W dowodach wyrażenie, które jest liczbą całkowitą, zastępujemy dowolną literą, np.:

$$7 \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}$$

Zapis ten oznacza, że wyrażenie $7k$ jest wielokrotnością liczby 7 i liczby całkowitej k, czyli jest liczbą podzielną przez 7.

Zadania — dowody dotyczące podzielności liczb

ZADANIE 88 | zadanie do analizy | 2 pkt

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy kolejne liczby. Każda liczba jest większa od poprzedniej o 1.

n — pierwsza liczba całkowita
$n+1$ — druga liczba całkowita
$n+2$ — trzecia liczba całkowita

2° Zapisujemy sumę liczb i redukujemy.

$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 =$

3° Wyłączamy liczbę 3 przed nawias.

$= 3(n+1) =$

4° Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy nawias literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 3\underbrace{(n+1)}_{k \in \mathbb{C}} = 3k$

5° Sumę trzech kolejnych liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej, więc suma ta jest podzielna przez 3.

ZADANIE 89 | zadanie ze wskazówkami

Wykaż, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowity

ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy pięć kolejnych liczb całkowitych.

2° Zapisujemy sumę kwadratów tych liczb.

3° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

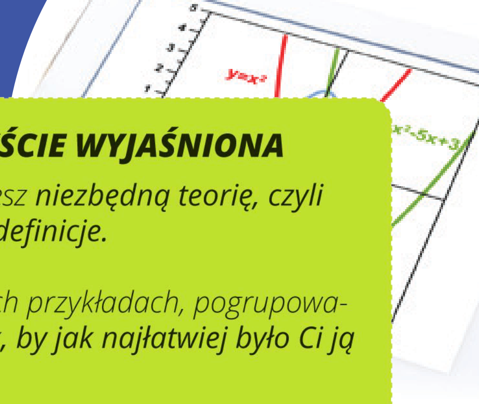
4° Redukujemy wyrazy podobne.

DOWODY I ZADANIA NA WYKAZYWANIE

W książce znajdziesz ***wiele dowodów i zadań na wykazywanie****. Jest to ten typ zadań, który sprawia uczniom z reguły najwięcej trudności.*

Ucząc się jednak zgodnie ze wskazówkami, będziesz w stanie opanować rozwiązywanie nawet takich zadań, które zawsze wydawały Ci się zbyt trudne.

Wszystkie zadania są dokładnie wytłumaczone, a dzięki kolejnym, podobnym zadaniom, które robisz samodzielnie, ***utrwalasz sobie sposób rozwiązywania****.*



3 Funkcje

NIEZBĘDNA TEORIA PRZEJRZYŚCIE WYJAŚNIONA

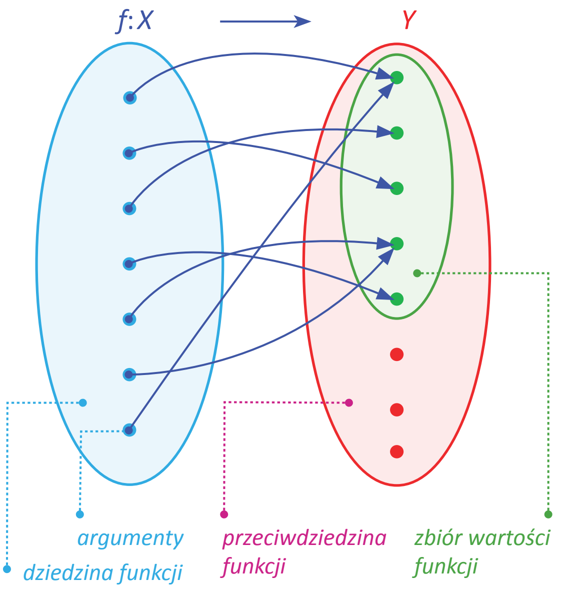
Na początku każdego działu znajdziesz ***niezbędną teorię, czyli najważniejsze wzory, twierdzenia i definicje.***

Cała teoria oparta jest na konkretnych przykładach, pogrupowana, usystematyzowana i ***ułożona tak, by jak najłatwiej było Ci ją zrozumieć i zapamiętać.***

Podstawowe wiado

	DEFINICJA
FUNKCJA	Funkcja ze zbioru X w zbiór Y to przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X (dziedziny) dokładnie jednego elementu zbioru Y (przeciwdziedziny funkcji).
ARGUMENT FUNKCJI	Elementy dziedziny nazywamy argumentami.
WARTOŚĆ FUNKCJI	Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy wartościami funkcji. Tworzą one zbiór wartości funkcji.
	Aby określić funkcję, należy podać zbiór X i Y oraz regułę, według której argumentom ze zbioru X przyporządkowujemy wartości funkcji.
	Funkcje zazwyczaj oznaczamy małymi literami, np.: f, g, h.

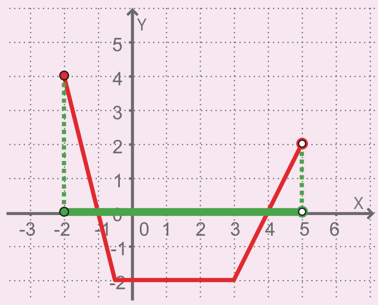
PRZYKŁAD



Ogólne własności funkcji

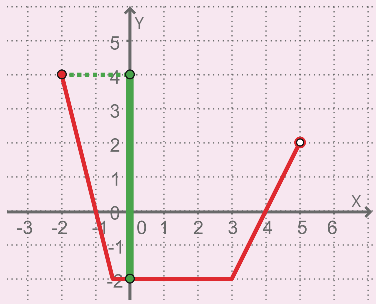
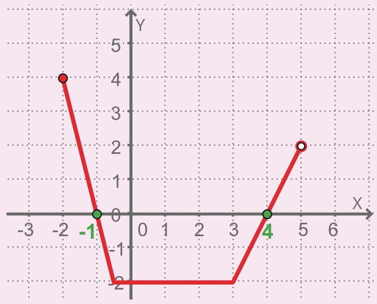
ZAPIS SYMBOLICZNY FUNKCJI:

DZIEDZINA FUNKCJI TO:

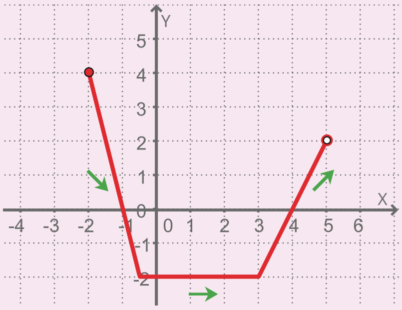
	ZAPIS SYMBOLICZNY FUNKCJI	DZIEDZINA FUNKCJI
OPIS	$y = f(x)$	zbiór X
PRZYKŁAD	$y = 2x + 3$ lub $f(x) = 2x + 3$	 $x \in \langle -2; 5)$

ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI TO:

MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI TO:

	ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI	MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI
OPIS	zbiór Y	x_0 to współrzędna x punktu, w którym wykres przecina oś OX.
PRZYKŁAD	 $y \in \langle -2; 4\rangle$	 $x_0 = -1$ i $x_0 = 4$

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI:

DEFINICJA	W pewnym przedziale zawartym w dziedzinie funkcja jest:	rosnąca	gdy wraz ze wzrostem argumentów $(x_1 < x_2)$	rosną wartości $(f(x_1) < f(x_2))$.
		malejąca		maleją wartości $(f(x_1) > f(x_2))$.
		stała		wartości są stałe $(f(x_1) = f(x_2))$.
PRZYKŁAD		funkcja malejąca $f(x)\searrow \Longleftrightarrow x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2} \right\rangle$ funkcja stała $f(x)\rightarrow \Longleftrightarrow x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 3 \right\rangle$ funkcja rosnąca $f(x)\nearrow \Longleftrightarrow x \in \langle 3; 5)$		

RODZAJE FUNKCJI:

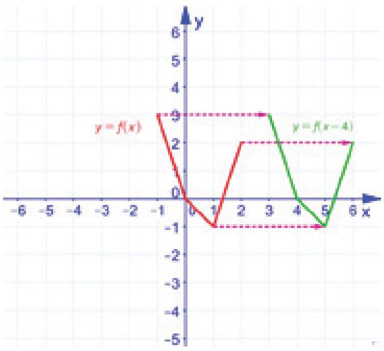
np. funkcja liniowa, kwadratowa, wielomianowa, wymierna, trygonometryczna, logarytmiczna, wykładnicza, potęgowa.

Przekształcenia równoległe wykresu funkcji

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OX:
$y = f(x - p)$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OX.

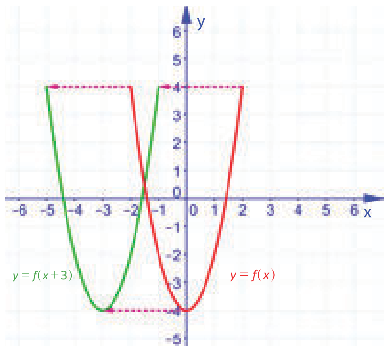
PRZYKŁAD 1



Wykres został przesunięty o 4 jednostki w prawo.

$p = 4$

PRZYKŁAD 2



Wykres został przesunięty o 3 jednostki w lewo.

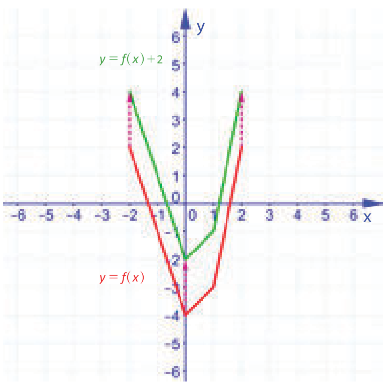
$p = -3$

Przy przesunięciu wykresu funkcji w poziomie należy zwrócić uwagę na zmianę znaku przy liczbie p.

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OY:
$y = f(x) + q$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OY.

PRZYKŁAD 3

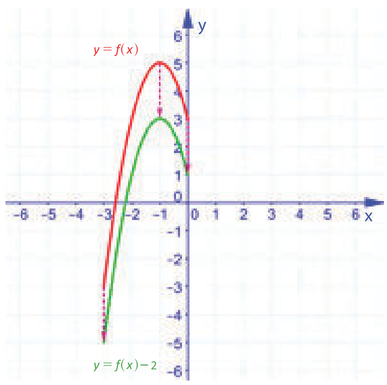


Wykres został przesunięty o 2 jednostki w górę.

$q = 2$

Jeśli $q > 0$, to przesuwamy w górę.

PRZYKŁAD 4



Wykres został przesunięty o 2 jednostki w dół.

$q = -2$

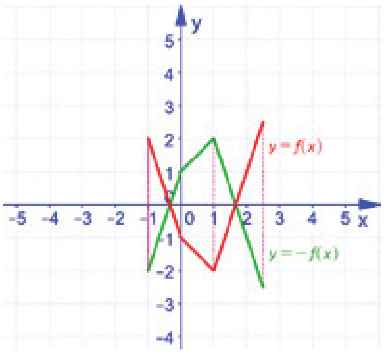
Jeśli $q < 0$, to przesuwamy w dół.

Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych

PRZYKŁAD

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI OX: $y = -f(x)$

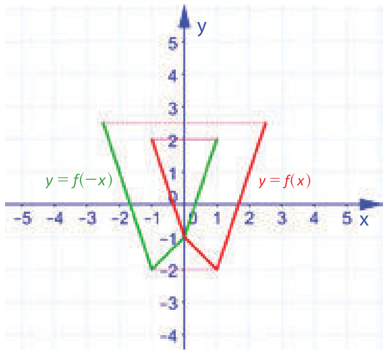
Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OX.



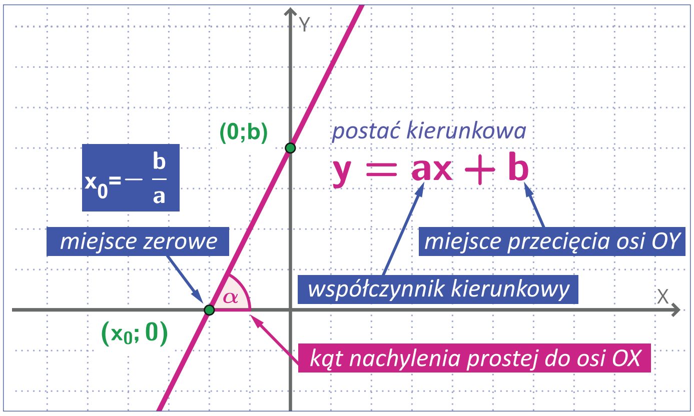
PRZYKŁAD

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI OY: $y = f(-x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OY.



Wykres i własności funkcji liniowej



NAJWAŻNIEJSZE POSTACI FUNKCJI LINIOWEJ

postać **kierunkowa**	$y = ax + b$
postać **ogólna**	$Ax + By + C = 0$, współczynniki A i B nie są jednocześnie zerami

WŁASNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA KIERUNKOWEGO a

$a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie kąt α oznacza kąt między wykresem funkcji a osią OX

↑ patrz rysunek

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ

zależy od współczynnika kierunkowego a

$a > 0$	funkcja jest rosnąca
$a = 0$	funkcja jest stała
$a < 0$	funkcja jest malejąca

PUNKTY PRZECIĘCIA WYKRESU FUNKCJI LINIOWEJ Z OSIAMI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

współczynnik b	miejsce przecięcia osi OY w punkcie $(0; b)$
miejsce zerowe	• dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$ (jego postać: $x_0 = -\frac{b}{a}$) • nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = b = 0$ • brak miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$

	Aby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa różne punkty należące do wykresu i przeprowadzić przez nie prostą. W szczególności można znaleźć przecięcia z osiami układu współrzędnych: z osią OX (miejsce zerowe) oraz z osią OY.	
PROSTE PROSTOPADŁE I RÓWNOLEGŁE Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y = a_1x + b_1$ oraz $l: y = a_2x + b_2$, to:	Prosta k jest **równoległa** do l $(k \parallel l)$, jeśli $a_1 = a_2$, czyli oba współczynniki kierunkowe są takie same.	np.: $y = 2x + 3$ oraz $y = 2x - 7$ są równoległe
	Prosta k jest **prostopadła** do l $(k \perp l)$, jeśli $a_2 = -\frac{1}{a_1}$, $a_1 \neq 0$, czyli jeden współczynnik jest odwrotnością drugiego z przeciwnym znakiem. Jeśli funkcja liniowa jest stała (tzn. $y = b$), to prosta prostopadła nie jest już funkcją liniową, lecz prostą o równaniu $x = c$.	np.: $y = 3x - 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 4$ są prostopadłe, ponieważ odwrotnością 3 z przeciwnym znakiem jest $-\frac{1}{3}$

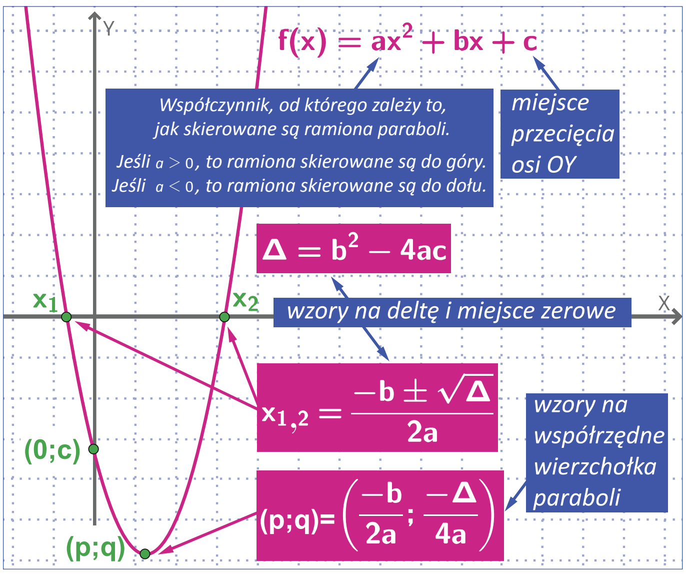
Wykres i własności funkcji kwadratowej

TRZY POSTACI FUNKCJI KWADRATOWEJ	postać **ogólna**	$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
	postać **kanoniczna**	$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$ i (p,q) to współrzędne wierzchołka paraboli
	postać **iloczynowa**	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie $a \neq 0$ i x_1, x_2 są miejscami zerowymi (pierwiastkami) funkcji
MIEJSCA ZEROWE FUNKCJI KWADRATOWEJ Liczba rozwiązań (pierwiastków), inaczej: miejsc zerowych, zależy od delty. Jeżeli:	$\Delta > 0$	**parabola** ma dwa różne miejsca zerowe
	$\Delta = 0$	**parabola** ma jedno miejsce zerowe (podwójny pierwiastek)
	$\Delta < 0$	**parabola** nie ma miejsc zerowych

WYKRES FUNKCJI KWADRATOWEJ

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Funkcja ma oś symetrii w punkcie $x = p$.

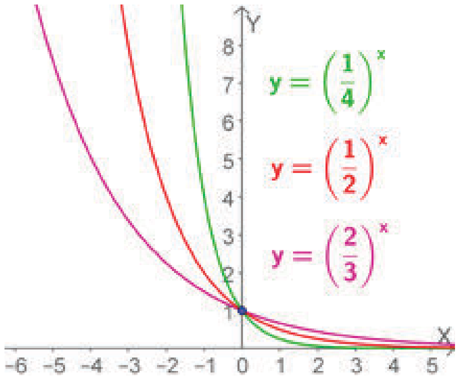
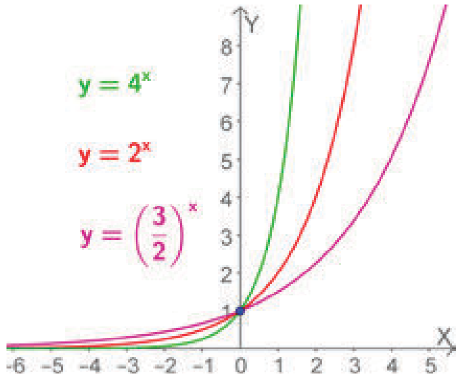
W celu narysowania paraboli potrzebujemy następujących punktów (patrz rysunek obok): miejsca zerowe (pod warunkiem, że istnieją), wierzchołek paraboli oraz współrzędne przecięcia osi.



Wykres i własności funkcji wykładniczej

DEFINICJA

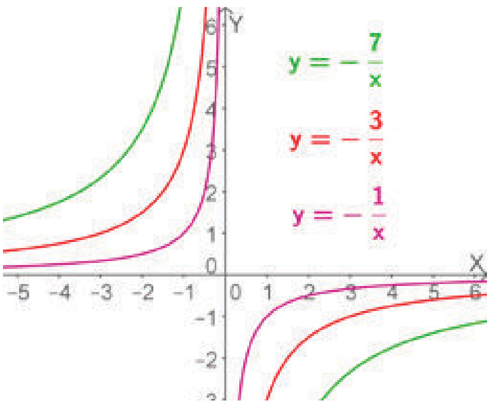
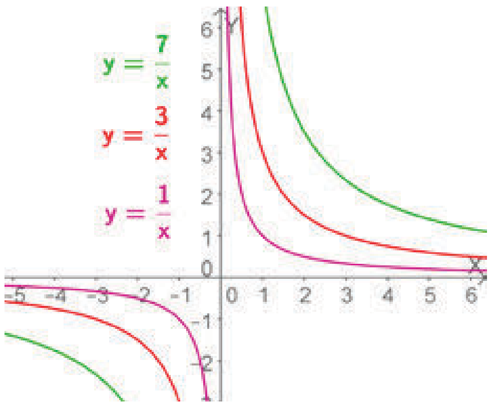
Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci: $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ oraz $a \neq 1$.

WYKRES		
PARAMETR a	$y = a^x, a \in (0;1)$	$y = a^x, a \in (1;\infty)$
DZIEDZINA, ZBIÓR WARTOŚCI	$D = \mathbb{R},\ ZW = (0;\infty)$	
MONOTONICZNOŚĆ	Funkcja jest malejąca.	Funkcja jest rosnąca.
PRZECIĘCIE Z OSIĄ OY	Każda krzywa wykładnicza przecina oś OY w punkcie $(0;1)$, ponieważ $f(0) = a^0 = 1$ dla $a > 0$.	
MIEJSCA ZEROWE	Brak	

Wykres i własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

DEFINICJA

Funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest parametrem i $a \neq 0$, jest przykładem funkcji wymiernej.

WYKRES		
PARAMETR a	$a < 0$	$a > 0$
POŁOŻENIE WYKRESU	W drugiej i czwartej ćwiartce	W pierwszej i trzeciej ćwiartce
DZIEDZINA, ZBIÓR WARTOŚCI	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ ZW = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI	Rosnąca w przedziałach: $(-\infty; 0), (0; \infty)$	Malejąca w przedziałach: $(-\infty; 0), (0; \infty)$
ZNAK FUNKCJI	Dodatnia dla $x < 0$, Ujemna dla $x > 0$	Dodatnia dla $x > 0$, Ujemna dla $x < 0$
PRZECIĘCIE Z OSIĄ OY	Brak	
MIEJSCA ZEROWE	Brak	

Zadania — funkcje określone za pomocą opisu słownego

ZADANIE 109	zadanie do analizy	1 pkt	

Dana jest funkcja f, w której każdej liczbie naturalnej $n > 3$ przyporządkowany jest iloczyn liczb pierwszych mniejszych od tej liczby. Prawdziwa zależność to:

A. $f(4) = 5$ B. $f(6) = f(7)$

ROZWIĄZANIE

1° Liczby pierwsze to 2, 3, 5, 7, 11... (zobacz definicję s. 22).

2° Obliczamy wartości dla poszczególnych argumentów.

2.1° Odpowiedź A. $f(4) = 2 \cdot 3 = 6$, więc odrzucamy odp. A

2.2° Odpowiedź B. $f(6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$f(7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$f(6) = f(7)$, więc odp. B jest poprawna

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

ZADANIE 110	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	CKE

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej większej od 1 jej największy dzielnik będący liczbą pierwszą. Spośród liczb: $f(42)$, $f(44)$, $f(45)$, $f(48)$ największa to:

A. $f(42)$ B. $f(44)$ C. $f(45)$ D. $f(48)$

ROZWIĄZANIE

1° Wypisujemy dzielniki poszczególnych liczb.

2° Wybieramy największą z obliczonych wartości.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 111	zadanie sprawdzające	1 pkt	CKE

Funkcja f, określona dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich, przyporządkowuje liczbie x ostatnią cyfrę jej kwadratu. Zbiór wartości funkcji f zawiera dokładnie:

A. 5 elementów, B. 6 elementów, C. 9 elementów, D. 10 elementów.

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego

ZADANIE 241	*zadanie do analizy*		

POWTÓRKI W TRZECH KROKACH

Aby zapamiętać sposób rozwiązania określonego typu zadań, stosujemy zasadę trzech kroków.

W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_2 = 5$ i $a_7 = 20$. Wte

A. 3 B. 14

ROZWIĄZANIE

1° W ciągu arytmetycznym każdy wyraz różni się od następnego o stałą wartość (różnicę r). Gdy mamy wyraz a_2 i a_7, to znaczy, że wyrazy te różnią się o pięć różnic. $a_7 - a_2 = 5r$

2° Podstawiamy za $a_2 = 5$ i za $a_7 = 20$ i obliczamy r.

$5r = 20 - 5$

$5r = 15 \quad | : 5$

$r = 3$

KROK 1

W pierwszym zadaniu analizujesz sposób rozwiązania.

zu a_2. $a_5 = a_2 + 3r = 5 + 3 \cdot 3 = 5 + 9 = 14$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

ZADANIE 242	*zadanie ze wskazówkami*	1 pkt	

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 12$ i $a_5 = 38$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

KROK 2

Drugie zadanie, które jest bardzo podobne, rozwiązujesz samodzielnie, korzystając ze wskazówek.

C. -14 D. -26

tępnego o stałą wartość (różnicę r). Gdy mamy wyraz a_3 i a_5, to znaczy, że wyrazy te różnią się o dwie różnice.

2° Podstawiamy za $a_3 = 12$ i za $a_5 = 38$ i obliczamy r.

3° Pierwszy wyraz obliczamy, odejmując od a_3 dwie różnice.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 243	*zadanie sprawdzające*	1 pkt	

W ciągu arytmetycznym piąty wyraz jest równy 15, a jedenasty jest równy 33. Różnica tego ciągu jest równa:

A. 6 B. 3 C. -3 D. 18

ROZWIĄZANIE

KROK 3

Ostatnie, trzecie zadanie, rozwiązujesz już całkowicie samodzielnie, opierając się na sposobie pokazanym wcześniej.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α.

2° Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to znaczy że, zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przyległej jest równy $3 : 4$. Oznaczamy długości odpowiednich boków jako $3x$ i $4x$.

3° Trzeci bok oznaczamy jako c. Jego długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

4° Obliczamy wartość $\cos\alpha$.

5° Obliczamy wartość wyrażenia $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 285	zadanie sprawdzające	1 pkt	maj 2014

Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, to wartość wyrażenia $\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ jest równa:

A. $-\frac{23}{11}$ B. $-\frac{11}{23}$ C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{24}{5}$

ROZWIĄZANIE

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

Zadania — wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90°

ZADANIE 286	zadanie do analizy	1 pkt	CKE

Liczba $\sin 150^\circ$ jest równa liczbie:

A. $\cos 60^\circ$ B. $\cos 120^\circ$

ROZWIĄZANIE

1° Zamieniamy kąt 150° na różnicę kątów postaci $180^\circ - \alpha$.

2° Korzystamy ze wzoru redukcyjnego: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. $= \sin 30^\circ =$

3° Odczytujemy wartość sinusa kąta 30°. $= \frac{1}{2} =$

4° Taką samą wartość jak $\sin 30^\circ$ ma $\cos 60^\circ$. $= \cos 60^\circ$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ODPOWIEDZI DO WSZYSTKICH ZADAŃ WYJAŚNIONE „KROK PO KROKU”

Odpowiedzi do zadań ze wskazówkami i sprawdzających, które rozwiązywałeś samodzielnie, znajdziesz kilka stron dalej.

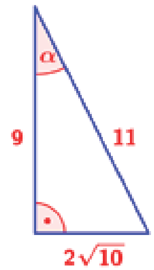
Rozwiązania — obliczanie wartości funkcji z definicji

ROZWIĄZANIE ZADANIA 275		1 pkt	sierpień 2012

W trójkącie prostokątnym dane są długości boków (zobacz rysunek). Wtedy:

A. $\cos\alpha = \frac{9}{11}$ C. $\sin\alpha = \frac{11}{2\sqrt{10}}$

B. $\sin\alpha = \frac{9}{11}$ D. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$



ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z definicji poszczególnych funkcji.

1.1° Sinus to stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przeciwprostokątnej. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$

1.2° Cosinus to stosunek długości przyprostokątnej przyległej do przeciwprostokątnej. $\cos\alpha = \frac{9}{11}$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

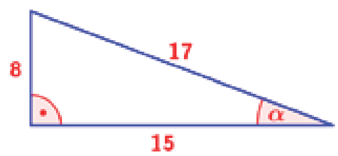
ROZWIĄZANIE ZADANIA 276		1 pkt	

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości $8, 15, 17$. Sinus najmniejszego kąta jest równy:

A. $\frac{8}{17}$ B. $\frac{17}{8}$ C. $\frac{15}{17}$ D. $\frac{17}{15}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy. Najmniejszy kąt znajduje się naprzeciwko najkrótszego boku, czyli naprzeciwko boku o długości 8.



2° Korzystamy z definicji funkcji sinus — jest to stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przeciwprostokątnej. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

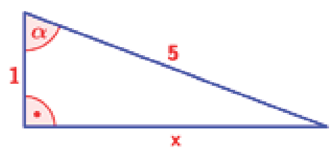
ROZWIĄZANIE ZADANIA 278		1 pkt	CKE

W trójkącie, przedstawionym na rysunku obok, sinus kąta ostrego α jest równy:

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, oznaczając długość trzeciego boku jako x.



6 Podsumowanie

http://jakzdacmaturezmatematyki.pl/258/podsumowania/6

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzednich działów. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

Możesz skorzystać ze wskazówki. To numer zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu. ↓

GOTOWE POWTÓRKI PO KAŻDYM DZIALE

*Po każdym dziale znajduje się podsumowanie, w którym są zarówno **zadania z danego działu, jak i wszystkich poprzednich, dzięki czemu systematycznie powtarzasz i utrwalasz wiedzę**.*

wie

+ 2

WERSJA ON-LINE POLICZY TWOJE PUNKTY

Kod QR przeniesie Cię do wersji on-line podsumowania na stronie jakzdacmaturezmatematyki.pl, gdzie będziesz mógł sprawdzić uzyskany przez Ciebie wynik.

zobacz zad. 211

ZAD. P.6.2 (0-1) Rozwiązaniem równania $4(2-x)=5x-1$ jest:

A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=7$ D. $x=-\frac{1}{7}$

zobacz zad. 181

ZAD. P.6.3 (0-1) Równanie $\frac{x+1}{x-1}=1$:

A. nie ma rozwiązań,
B. ma jedno rozwiązanie,
C. ma dwa rozwiązania,
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

zobacz zad. 193

ZAD. P.6.4 (0-1) Piątym wyrazem ciągu (a_n) o wzorze $(a_n)=(-1)^n\cdot(n^2-5n)$ jest liczba:

A. -1 B. 0 C. 5 D. 25

zobacz zad. 238

ZAD. P.6.5 (0-1) Osią symetrii funkcji $y=x^2-8x+100$ jest prosta:

A. $x=4$ B. $x=-4$ C. $x=8$ D. $x=-8$

zobacz zad. 145

ZAD. P.6.6 (0-1) W ciągu arytmetycznym $a_1=5$ oraz $a_{10}=15$. Wówczas suma S_{10} dziesięciu początkowych wyrazów ciągu jest równa:

A. 200 B. 20 C. 220 D. 100

zobacz zad. 250

ZAD. P.6.7 (0-1) W rosnącym ciągu geometrycznym $(a\ )$ dane są $a\ =3$ i $a\ =27$. Wtedy $a\ $ równy jest:

A. 81 B. 243

zobacz zad. 244

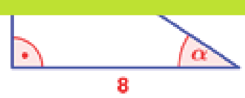
W PRZYPADKU PROBLEMÓW - WSKAZÓWKI

*Jeśli masz problem z rozwiązaniem któregoś z zadań, skorzystaj ze wskazówki, która **wskaże Ci zadanie podobne lub potrzebny wzór**.*

ZAD. P.6.8 (0-1) Na rysunku zaznaczono długości bok prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy:

zobacz zad. 274

A. $\sin\alpha=0{,}8$
B. $\sin\alpha=0{,}6$
C. $\cos\alpha=1{,}2$
D. $\operatorname{tg}\alpha=1{,}25$



ZAD. P.6.9 (0-1) Kąt α jest ostry i $\cos\alpha=\frac{12}{13}$. Wtedy:

A. $\sin\alpha=\frac{13}{5}$ B. $\sin\alpha=\frac{5}{12}$ C. $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ D. $\sin\alpha=\frac{12}{5}$

zobacz zad. 283

ZAD. P.6.10 (0-1) Liczba $\operatorname{tg}60^\circ-\sin30^\circ$ jest równa:

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

zobacz zad. 290

ZAD. P.6.11 (0-1) Różnica $\log_2 32-4\log_2 1$ jest równa:

A. 5 B. 3 C. 6 D. 36

zobacz zad. 46

Odpowiedzi do podsumowań 1-10

WSZYSTKO MOŻESZ SPRAWDZIĆ SAMODZIELNIE

*Na końcu książki znajdziesz **odpowiedzi do wszystkich zadań z podsumowań. W przypadku dowodów zamieściliśmy również pełne rozwiązania**, żebyś mógł dokładnie przeanalizować sposób rozwiązania.*

PODSUMOWANIE NR 1

P. 1.1	B	P. 1.2	B	P. 1.3	C	P. 1.4	B	P. 1.5	D
P. 1.11	D	P. 1.12	D	P. 1.13	C	P. 1.14	A	P. 1.15	D
P. 1.21	C	P. 1.22	B	P. 1.23	A				

PODSUMOWANIE NR 2

P. 2.1	C	P. 2.2	D	P. 2.3	C	P. 2.4	B	P. 2.5	B	P. 2.6	D	P. 2.7	C	P. 2.8	A	P. 2.9	B	P. 2.10	D
P. 2.11	B	P. 2.12	B	P. 2.13	A	P. 2.14	C	P. 2.15	A	P. 2.16	C	P. 2.17	D	P. 2.18	C	P. 2.19	D		

P. 2.20 $(n+2)^2-n^2=n^2+2\cdot 2\cdot n+2^2-n^2=4n+4=4\cdot\underbrace{(n+1)}_{k\in\mathbb{C}}=4k$ Wyrażenie jest podzielne przez 4.

P. 2.21 $4^{n+2}+3\cdot 4^{n+1}-4^n=4^n\cdot 4^2+3\cdot 4^n\cdot 4-4^n=16\cdot 4^n+12\cdot 4^n-4^n=27\cdot\underbrace{4^n}_{k\in\mathbb{C}}=27k$

Liczba jest podzielna przez 27.

P. 2.22

$$(4n+1)^2-(4m-1)^2=(4n)^2+2\cdot 4n+1^2-\left[(4m)^2-2\cdot 4m+1^2\right]=$$
$$=16n^2+8n+1-(16m^2-8m+1)=16n^2+8n+1-16m^2+8m-1=$$
$$=16n^2+8n+\cancel{1}-16m^2+8m-\cancel{1}=16n^2+8n-16m^2+8m=$$
$$=8\cdot(2n^2+n-2m^2+m)=8\cdot\underbrace{(2n^2+n-2m^2+m)}_{k\in\mathbb{C}}=8k$$

Liczba jest podzielna przez 8.

P. 2.23

$$\frac{k^2+6k+25}{k+3}\geq 8 \quad \Big|\cdot(k+3)$$
$$k^2+6k+25\geq 8(k+3)$$
$$k^2+6k+25\geq 8k+24$$
$$k^2-2k+1\geq 0$$
$$(k-1)^2\geq 0$$

Dla każdego $k\in\mathbb{R}_+$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

P. 2.24

$$a^4\geq b(2a^2-b)$$
$$a^4\geq 2a^2b-b^2$$
$$a^4-2a^2b+b^2\geq 0$$
$$(a^2-b)^2\geq 0$$

Dla każdej liczby rzeczywistej a i b wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

P. 2.25

$$11x^2+6xy+3y^2\geq 0$$
$$2x^2+\underbrace{9x^2+6xy+y^2}+2y^2\geq 0$$
$$\underbrace{\underbrace{2x^2}_{\geq 0}+\underbrace{(3x+y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{2y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}\geq 0$$

Suma wyrażeń nieujemnych jest również nieujemna dla każdego $x,y\in\mathbb{R}$, więc nierówność jest prawdziwa.

PODSUMOWANIE NR 3

P. 3.1	D	P. 3.2	B	P. 3.3	D	P. 3.4	A	P. 3.5	B	P. 3.6	D	P. 3.7	D	P. 3.8	C	P. 3.9	C	P. 3.10	B
P. 3.11	C	P. 3.12	B	P. 3.13	A	P. 3.14	C	P. 3.15	D	P. 3.16	A	P. 3.17	D						

P. 3.18 $5^{10}+2\cdot 5^9+5^8=5^8(5^2+2\cdot 5+1)=5^8(25+10+1)=36\cdot\underbrace{5^8}_{k\in\mathbb{C}}=36k$ Liczba jest więc podzielna przez 36.

Odwiedź nasz fanpage!
„Jak zdać maturę z matematyki”

JAK **ZDAĆ** MATURĘ Z MATEMATYKI? NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

nie tylko dla humanistów!

W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!

Dariusz Kulma to nauczyciel z ponad 20-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in.:

- **nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia** w 2008 roku,
- jako **jedyny matematyk trzykrotnie nagrodzony w ogólnopolskim konkursie Nauczyciel Roku** (pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego”) — w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji”, w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem **Nauczyciela Roku 2008**.
- Jest pomysłodawcą i twórcą projektu **Matematyka Innego Wymiaru** — zrzeszającego ponad 20 tysięcy uczniów w kraju.
- Jest **autorem piętnastu zbiorów zadań**, w tym dla najmłodszych uczniów z zadaniami z krainy Kwadratolandii.
- Prowadzi **fanpage „Jak zdać maturę z matematyki?”**, pomagając w rozwiązywaniu zadań, udzielając porad i wskazówek przedmaturalnych.
- Jest pomysłodawcą **Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży** oraz autorem zadań konkursowych.
- Jest **autorem programu nauczania matematyki** dla szkół ponadgimnazjalnych opracowanego w ramach projektu E-laboratorium matematyczne.

„(...) **Autor książki prowadzi uczniów przez gąszcz zagadnień matematycznych w sposób prosty i bezpieczny.** Zastosowany sposób narracji **pozwala spokojnie przejść przez wszystkie najistotniejsze zagadnienia matematyki** szkolnej, nie tylko prezentując gotowe rozwiązania, ale – uwzględniając najnowsze osiągnięcia psychologii i pedagogiki – **dbając o trwałość powtarzanej wiedzy i nabytych umiejętności.**”

Dr Witold Pająk, Honorowy Profesor Oświaty, rzeczoznawca MEN podręczników szkolnych

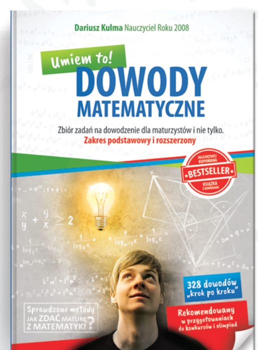
!

Dzięki wieloletniej pracy z młodzieżą Dariusz Kulma **opracował własny system nauczania matematyki, dzięki któremu,** jak twierdzą jego uczniowie, **można polubić, a przede wszystkim zrozumieć ten przedmiot.** Prowadzi zajęcia z maturzystami zarówno na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym. Skuteczność tych metod potwierdzają wyniki jego uczniów. W rekordowym roku osiągnęli oni średni wynik **91,45%** (przy średniej ogólnopolskiej ok. 50%). Co roku wszyscy jego uczniowie zdają egzamin maturalny, wielu z nich **otrzymuje wyniki 100%, a ponad połowa z nich wyniki powyżej 90%!**

OD DZIŚ, DZIĘKI TEJ KSIĄŻCE, RÓWNIEŻ I TY MOŻESZ NALEŻEĆ DO GRONA OSÓB, KTÓRE OSIĄGNĘŁY SUKCES NA MATURZE!

Autorskie arkusze maturalne

Bestseller! Zbiór zadań maturalnych na dowodzenie



Książki do kompletu, dzięki którym jeszcze lepiej zdasz maturę.

NA CZYM OPIERAMY NASZ SYSTEM?

- **677 ZADAŃ** — z matur z poprzednich lat oraz zadań autorskich, w tym **443 zadania rozwiązane krok po kroku** oraz 234 zadania zawarte w podsumowaniach.
- **NAJŁATWIEJSZE SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ** — wszystkie zadania zawierają odpowiedzi i komentarze pozwalające na prześledzenie sposobu rozwiązywania określonego rodzaju zadań.
- **WYĆWICZENIE UMIEJĘTNOŚCI** — specjalnie opracowany system pozwala na dokładne zapoznanie się z poszczególnymi zagadnieniami poprzez zadania do analizy, samodzielnie wykonywane zadania sprawdzające, a następnie podtrzymywanie wiedzy poprzez systematyczne powtórki przy pomocy podsumowań (dostępnych również jako **TESTY ON-LINE**).

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-32-6
9 788363 975326
Cena 56,00 zł