

Ponad 25 000 sprzedanych egzemplarzy książek z serii „Jak zdać maturę z matematyki”

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI ? NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni.

nie tylko dla
humanistów!

630
zadań

PAKIET
ON-LINE

NOWE
WYDANIE

matura
nowa podstawa
programowa

2016

2018

2017

2019

Dariusz Kulma

Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz
odpowiedź →

DARIUSZ KULMA

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM



Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni

*nie tylko dla
humanistów!*

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2016

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:

Drukarnia Beltrani Sp. J.

ul. Śliwkowa 1

31-982 Kraków

tel. 012 262 91 43

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z www.fotolia.com: © Syda Productions - id. 75958538; © ag visuell - id. 53584856;
© Dreaming Andy - id. 62704436; © valdis torms - id. 46177828; © Marek - id. 68124775;
© valdis torms - id. 66702797; © Denis Junker - id. 54171604; © Andrey_Arkusha - id. 74798374;
© dengess - id. 42780077; © Lovrencg - id. 51595955; © kharlamova_lv - id. 47907680

Fotografie z www.pixabay.com: PublicDomainPictures - id. animal-1717_640;
stux - id. origami-210114_1280; blickpixel - id. cube-570703_1920

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki

tel. 51-77777-51

e-mail: elitmat@elitmat.pl , www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2016. Wydanie czwarte.

ISBN: 978-83-63975-25-8

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy składać przez stronę:

www.jakzdacmaturezmatematyki.pl

lub na adres: elitmat@elitmat.pl

● WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać!

Ponieważ: po pierwsze, poznamy się, a po drugie — wyjaśnię Ci, co, dlaczego, jak i kiedy zrobić, by zdać maturę z matematyki.

Drogi Maturzysto!

Obowiązkowa matura z matematyki dla niektórych jest czymś prostym i banalnym, dla innych jest jedną z wielkich życiowych traum. Tych drugich jest jednak zdecydowanie więcej.

W 2014 roku egzaminu dojrzałości z matematyki nie zdała rekordowa liczba maturzystów — aż 25%! To bardzo dużo. Dlaczego aż tyle?

Wynika to z wielu nawarstwionych problemów. Uczeń, który nie lubi matematyki i ma problemy z nauczeniem się jej, inaczej postrzega matematyczną rzeczywistość. Dodatkowo paraliżuje go strach i lęk przed tym przedmiotem, ponieważ ma wiele negatywnych wspomnień związanych z jego dotychczasową nauką. Nie wiem, jakim jesteś uczniem, ale skoro czytasz tę książkę, to również masz jakieś obawy związane z tym egzaminem. Może chcesz tylko zdać, a może zależy Ci na jak najwyższym wyniku. Z każdej z tych sytuacji wyjdiesz zwycięsko, jeśli zastosujesz moją metodę przygotowań!

Książka „Jak zdać maturę z matematyki” jest kołem ratunkowym przede wszystkim dla osób, które mówią o sobie, że są humanistami, ale nie tylko dla nich. Przez 20 lat jako nauczyciel matematyki zebrałem mnóstwo doświadczeń i spostrzeżeń dotyczących uczniów z trudnościami w uczeniu tego przedmiotu. Przygotowałem blisko 10 tysięcy uczniów do różnych egzaminów i na różnym poziomie. Wypracowałem swój własny warsztat pracy, który udoskonalam z roku na rok z coraz lepszymi efektami.

Czym ta książka różni się od innych?

Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym?” to specjalny system przygotowań oparty na kilku filarach.

Pierwszy to „topatologiczne” tłumaczenie zagadnień matematycznych. Wielu matematyków mogą razić uproszczenia w moich wyjaśnieniach. Jednak dla Ciebie i dla mnie liczy się efekt — masz zdać maturę! Na pewno masz już dość niezrozumiałych sformułowań, z którymi wielokrotnie spotykałeś się na co dzień w szkole. W tej książce nie znajdziesz encyklopedycznych formułek. Wyjaśnienia mają być proste i konkretne. Dlatego gdy przypominam Ci wzór w części teoretycznej, to od razu możesz go ponownie zobaczyć.

Drugi filar to specjalny rozkład zadań — zasada trzech kroków. Pierwszy krok — zadanie do analizy, w trakcie której poznajesz najprostszy sposób rozwiązania zadania określonego typu. Drugi krok to rozwiązywanie zadania podobnego do analizowanego, ale w oparciu o wskazówki. Nawet jeśli jesteś pozbawiony matematycznej pewności, zobaczysz, że z podpowiedziami powoli zaczniesz wierzyć, że możesz się nauczyć rozwiązywać poszczególne zadania. Krok trzeci to zadanie sprawdzające — przy jego rozwiązywaniu nie otrzymujesz już pomocy, lecz tylko odpowiedź. Musisz w końcu być samodzielny! Szybko zobaczysz, że ten system się sprawdza. Takich zadań z zasadą trzech kroków jest w tej książce 411. Jest ich dużo, ale z reguły są dość krótkie i proste.

Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych. Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghausa i Tony’ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6–7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawiają się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.** Podsumowania składają się z zadań testowych oraz zadań otwartych krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi, czyli tak jak w typowym arkuszu maturalnym. Łącznie jest to 219 zadań maturalnych, które sprawią, że będziesz miał coraz trwalej opanowane poznane umiejętności. Co ważne, w podsumowaniach tych znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów; na przykład w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowa-



niu nr 5 — z poprzednich pięciu. **Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury!** Przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz wskazówki. Najczęściej będzie to numer zadania podobnego, a czasem tylko informacja, gdzie szukać wskazówki. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań, a nawet rozwiązania krok po kroku, gdy zadanie jest dowodem lub innym zadaniem na wykazywanie. W innych książkach, gdy spotykamy dowody, najczęściej nie ma odpowiedzi ani żadnego rozwiązania. W tej książce jest inaczej.

Czy ten system działa?

W roku 2013 moi uczniowie osiągnęli z matury z matematyki średni wynik **91,45%**, który przy średniej ogólnopolskiej — w okolicach 50% — jest, musisz przyznać, dużo lepszy. W 2015 roku przy trudniejszym arkuszu wynik był tylko o kilka punktów procentowych niższy (**89,7%**), a **100% moich uczniów zdało egzamin maturalny**. Jak widzisz, ten system działa i Ty też możesz dołączyć do grupy szczęśliwców.

W książce znajdziesz większość najważniejszych typów zadań, jakie mogą znaleźć się na maturze. Trudno mówić o zadaniach „pewniakach”, jak na poprzednich maturach, ponieważ od roku 2015 matura przygotowana jest według nowej podstawy programowej. Jest jednak pewien kanon umiejętności, które mimo zmian podstawy programowej nadal będą pojawiały się w zadaniach maturalnych. Ta książka pomoże Ci opanować właśnie te najważniejsze umiejętności, byś mógł je skutecznie wykorzystać na maturze. Ten kanon umiejętności potwierdzają zamieszczone w książce wybrane zadania maturalne z konkretnych lat czy zadania zaproponowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną (CKE). Tym zadaniom przyglądaj się szczególnie. Nowe wydanie książki zostało poszerzone również o proste zadania na wykazywanie i dowodzenie. Takie zadania w arkuszu maturalnym są najczęściej dwa. Tych zadań też możesz się nauczyć.

Jakie rodzaje zadań będą na maturze podstawowej?

Arkusz maturalny będzie składał się z:

- 20 – 30 zadań zamkniętych, punktowanych w skali 0 – 1, w których jedną poprawną odpowiedź wybieramy z czterech podanych;
- 5 – 10 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi, punktowanych w skali 0 – 2,
- 3 – 5 zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi, punktowanych w skali 0 – 4, 0 – 5, 0 – 6.

łącznie na 170-minutowym egzaminie możesz zdobyć 50 punktów.

Złota zasada pewności zdania egzaminu maturalnego z matematyki

Jeśli masz już tę książkę, to wykonałeś pierwszy duży krok. Kolejne kroki nie muszą być duże, ale jest ważne, by były systematyczne. Gdy rozwiążesz zadania zamieszczone w tej książce, bez żadnych problemów zdasz maturę! Ale musisz być konsekwentny. Dla osób mniej systematycznych przygotowałem dwa harmonogramy, które pomogą im w rozplanowaniu pracy. Czas przygotowań rozłożyłem na 10 oraz 42 dni. Oczywiście możesz też przygotowywać się jeszcze wolniej i spokojniej, na przykład przez cały rok szkolny. Tak byłoby nawet najlepiej. Wszystko zależy od tego, ile czasu zostało Ci do matury.

Proszę Cię jeszcze o jedno — nie omijaj żadnych zagadnień, które będą obowiązywały na Twojej maturze. Książka jest całością. Zależności poznawane we wcześniejszych rozdziałach są potrzebne w dalszej części — są niezbędne! Gdy to zrealizujesz, Twój wynik będzie naprawdę dobry. Sam będziesz zaskoczony swoim sukcesem.

Powodzenia!



10 dni
↓
42 dni
↓



1 LICZBY RZECZYWISTE		str.
Wstęp teoretyczny — Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych		11
Wstęp teoretyczny — Liczby przeciwne i odwrotne do danej		11
Wstęp teoretyczny — Liczby wymierne i liczby niewymierne		12
Wstęp teoretyczny —		12
Zadania — obliczenia		14
Wstęp teoretyczny —		19
Zadania — potęgi i pierwiastki		21
Zadania — wyłączenie		23
Wstęp teoretyczny —		24
Zadania — notacja		24
Wstęp teoretyczny —		25
Zadania — ułamki okresowe		26
Wstęp teoretyczny — Logarytmy		27
Zadania — obliczanie logarytmów z definicji		27
Zadania — wykorzystanie wzorów dotyczących logarytmów		29
Wstęp teoretyczny — Błąd bezwzględny i względny		30
Zadania — błąd bezwzględny		31
Zadania — błąd względny		32
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających		33
Podsumowanie 1		45

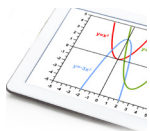
OPTIMALNY PLAN POWTÓREK
Przygotowanie planu pracy to podstawa powtórek maturalnych, dlatego zrobiliśmy to już za Ciebie.
W zależności od tego, jakim czasem dysponujesz, możesz wybrać wariant 10-dniowy lub 42-dniowy.
Przerabiając książkę zgodnie z harmonogramem, zdążysz z powtórzeniem wszystkich potrzebnych zagadnień, bo wiesz dokładnie, ile zajmie Ci to czasu.

1	1	numer dnia
1	1	
1	1	
1	1	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	2	
1	3	
1	3	
1	3	
1	4	
1	4	
1	4	
1	5	



2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE		str.
Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o wyrażeniach algebraicznych		47
Wstęp teoretyczny — Wzory skróconego mnożenia		47
Zadania — zastosowanie wzorów skróconego mnożenia		48
Zadania — usuwanie niewymierności z mianownika		50
Zadania — działania na wyrażeniach algebraicznych		51
Zadania — wyłączanie czynnika przed nawias		54
Zadania — działania na wyrażeniach wymiernych		55
Wstęp teoretyczny — Podzielność liczb		57
Wstęp teoretyczny — Wykazywanie podzielności		58
Zadania — dowody dotyczące podzielności liczb		58
Zadania — wykazywanie spełniania przez liczbę lub wyrażenie określonych warunków		61
Wstęp teoretyczny — Wykazywanie nierówności		62
Zadania — wykazywanie nierówności		62
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających		65
Podsumowanie 2		75

2	6	
2	6	
2	6	
2	6	
2	7	
2	7	
2	7	
2	7	
2	8	
2	8	
2	8	
2	8	
2	8	
2	9	
2	9	
2	10	




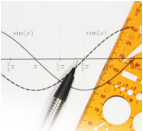

3 FUNKCJE

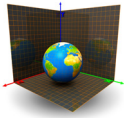
Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o funkcjach	77	3	11
Wstęp teoretyczny — Ogólne własności funkcji	77	3	11
Wstęp teoretyczny — Przekształcenia równoległe wykresu funkcji	78	3	11
Wstęp teoretyczny — Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych	79	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji liniowej	79	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji kwadratowej	80	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji wykładniczej	81	3	11
Wstęp teoretyczny — Wykres i własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	81	3	11
Zadania — funkcje określone za pomocą opisu słownego	82	3	11
Zadania — wykorzystywanie współrzędnych punktu należącego do wykresu funkcji	83	3	11
Zadania — obliczanie wartości i argumentów dla danych funkcji	85	3	11
Zadania — określanie własności funkcji	86	3	12
Zadania — przekształcanie wykresu funkcji	88	3	12
Zadania — interpretacja współczynników funkcji liniowej	89	3	13
Zadania — proste równoległe i prostopadłe	90	3	13
Zadania — odczytywanie współrzędnych wierzchołka paraboli z wykorzystaniem postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	92	3	14
Zadania — postać iloczynowa funkcji kwadratowej	96	3	14
Zadania — określanie własności funkcji kwadratowej	97	3	14
Zadania — obliczanie pierwiastków równania kwadratowego	98	3	15
Zadania — najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	100	3	15
Zadania — wielkości odwrotnie proporcjonalne w zadaniach praktycznych	104	3	15
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	106		
Podsumowanie 3	123	4	16



4 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Zadania — równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	125	4	17
Zadania — nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	126	4	17
Zadania — równania wymierne	129	4	18
Wstęp teoretyczny — Rodzaje równań kwadratowych — możliwe postaci po uproszczeniu	130	4	18
Zadania — równania wymierne równe zero	130	4	18
Zadania — wykorzystanie własności iloczynu do rozwiązywania równań	131	4	18
Zadania — równania kwadratowe z jedną niewiadomą	133	4	19
Wstęp teoretyczny — Rodzaje nierówności kwadratowych	136	4	19
Zadania — nierówności kwadratowe	137	4	19
Wstęp teoretyczny — Układy równań pierwszego stopnia	139	4	20
Zadania — rozwiązywanie układów równań oraz ich rodzaje	139	4	20
Zadania — zadania tekstowe	142	4	21

	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	150		
	Podsumowanie 4	169	5	22
	5 CIĄGI			
	Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o ciągach	171	5	23
	Wstęp teoretyczny — Ciąg arytmetyczny i geometryczny	171	5	23
	Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągów określonych wzorem ogólnym	172	5	23
	Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	173	5	23
	Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	174	5	23
	Zadania — wyznaczanie liczby wyrazów ciągów spełniających określone warunki	174	5	23
	Zadania — zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	176	5	24
	Zadania — zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	177	5	24
	Zadania — wyznaczanie wzoru ogólnego ciągów	178	5	24
	Zadania — wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego	179	5	24
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	184		
	Podsumowanie 5	195	6	25
	6 TRYGNOMETRIA			
	Wstęp teoretyczny — Najważniejsze wzory i zależności dotyczące funkcji trygonometrycznych	197	6	26
	Zadania — obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych z definicji	198	6	26
	Zadania — wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji	200	6	26
	Zadania — wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90°	201	6	26
	Zadania — działania z wykorzystaniem wartości funkcji trygonometrycznych	202	6	26
	Zadania — wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi	203	6	26
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	206		
	Podsumowanie 6	213	7	27
	7 PLANIMETRIA			
	Wstęp teoretyczny — Wzory i twierdzenia dotyczące figur geometrycznych	215	7	28
	Wstęp teoretyczny — Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów	218	7	28
	Zadania — wykorzystanie funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych	219	7	28
	Zadania — wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa	220	7	28
	Zadania — okręgi wpisane w trójkąt lub kwadrat i okręgi opisane na trójkącie lub kwadracie	222	7	29
	Zadania — podobieństwo trójkątów	225	7	29
	Zadania — wykorzystanie zależności między kątami środkowym i wpisanym opartymi na tym samym łuku	226	7	30
	Zadania — dowody geometryczne	229	7	30
	Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	233		
	Podsumowanie 7	243	8	31



8 GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA

Wstęp teoretyczny — Długość i środek odcinka, równanie prostej, pole trójkąta	245	8	32
Wstęp teoretyczny — Przekształcenia w układzie współrzędnych	246	8	32
Zadania — wykorzystanie wzoru na odległość dwóch punktów	246	8	32
Zadania — wykorzystanie wzoru na wyznaczenie współrzędnych środka odcinka	247	8	32
Zadania — wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez dwa punkty	248	8	32
Zadania — wyznaczenie prostej przechodzącej przez dwa punkty	249	8	32
Zadania — wyznaczenie wzoru symetralnej odcinka	250	8	32
Zadania — przekształcenia w układzie współrzędnych	251	8	33
Zadania — pozostałe zadania z geometrii kartezjańskiej	252	8	33
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	255		
Podsumowanie 8	263	8	34



9 STEREOMETRIA

Wstęp teoretyczny — Najważniejsze wzory dotyczące graniastosłupów, ostrosłupów i brył obrotowych	265	9	35
Zadania — wykorzystanie podstawowych wzorów dotyczących sześcianu	267	9	35
Zadania — wykorzystanie podstawowych wzorów dotyczących prostopadłościanu	268	9	35
Zadania — zależność między liczbą krawędzi, wierzchołków i ścian ostrosłupów oraz graniastosłupów	269	9	35
Zadania — wykorzystanie zależności wynikających z podstawowych wzorów dotyczących brył	270	9	36
Zadania — wykorzystanie funkcji trygonometrycznych i twierdzenia Pitagorasa do obliczeń z bryłami	273	9	37
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	278		
Podsumowanie 9	287	9	38



10 STATYSTYKA, PRAWDOPODOBIENSTWO I KOMBINATORYKA

Wstęp teoretyczny — Statystyka — najważniejsze wzory i definicje	289	10	39
Zadania — średnia arytmetyczna i mediana	290	10	39
Wstęp teoretyczny — Kombinatoryka	294	10	40
Zadania — zastosowanie reguły mnożenia	294	10	40
Zadania — zastosowanie reguły dodawania	296	10	40
Zadania — pozostałe zadania kombinatoryczne	297	10	40
Wstęp teoretyczny — Rachunek prawdopodobieństwa	298	10	41
Zadania — wykorzystanie własności prawdopodobieństwa	298	10	41
Zadania — prawdopodobieństwo klasyczne	299	10	41
Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających	305		
Podsumowanie 10	315	10	42

Odpowiedzi do podsumowań 1-10	317		
--------------------------------------	-----	--	--

INSTRUKCJA OBSŁUGI KSIĄŻKI

Drogi Maturzysto, przeczytałeś już wstęp?

Nie? To zapraszamy do przeczytania, dowiesz się z niego wiele o tej książce, co ułatwi zrozumienie instrukcji.

Tak? Poniżej znajdują się objaśnienia poszczególnych oznaczeń, z którymi spotkasz się podczas rozwiązywania zadań.

Zadania ← Oznaczenie zadań określonego typu lub dotyczących jednego zagadnienia.

zadanie do analizy ← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzami objaśniającymi poszczególne etapy rozwiązania.

zadanie ze wskazówkami ← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania w oparciu o podane wskazówki.

zadanie sprawdzające ← Zadania podobne do zadań do analizy i ze wskazówkami, do samodzielnego rozwiązania.

CKE ← Propozycje zadań Centralnej Komisji Egzaminacyjnej do matury według nowej podstawy programowej.

maj 2014 ← Zadania z matur z lat ubiegłych.

Rozwiązania ← Rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających, znajdujące się na kolejnych stronach.

warto wiedzieć... ← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań.

Cena brutto = 100% ← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania, znajdujące się na zielonym tle przy rozwiązaniu.

Jak zdać... 01 ← Porady ułatwiające organizację nauki oraz sam proces uczenia się.

Podsumowanie



← Podsumowujące zadania testowe oraz zadania otwarte obejmujące zagadnienia z działu, po którym się znajdują oraz działów poprzednich. Np. Podsumowanie 6 zawiera zadania z trygonometrii oraz zagadnienia z poprzednich pięciu działów. Każde podsumowanie ma swój indywidualny kod QR przeliterujący

UNIKALNY KOD DOSTĘPU

W każdej książce znajduje się unikalny kod uprawniający do skorzystania z pakietu on-line.

Wystarczy, że wpiszesz go na stronie i możesz skorzystać ze specjalnego modułu podsumowań, który sprawdzi Twoje odpowiedzi i obliczy liczbę zdobytych punktów.

...tęp do PAKIETU ON-LINE w STREFIE MATURZYSTY.

...adres www) i korzystaj z dodatkowych pomocy on-line.

i.pl/strefa_maturzysty



Wykazywanie podzielności

PODZIELNOŚĆ — WPROWADZENIE

Jeśli chcemy wykazać, że wyrażenie jest podzielne przez 7, to należy to wyrażenie przedstawić jako iloczyn liczby 7 i liczby całkowitej.

$$14 = 2 \cdot 7 \quad \text{liczba jest podzielna przez 7}$$

$$70 = 10 \cdot 7 \quad \text{liczba jest podzielna przez 7}$$

$$1638 = 234 \cdot 7 \quad \text{liczba jest podzielna przez 7}$$

Zauważmy, że każdą liczbę podzielną przez 7 możemy rozłożyć na iloczyn liczby 7 i określonej liczby całkowitej, której wartość nie jest dla nas istotna. W dowodach wyrażenie, które jest liczbą całkowitą, zastępujemy dowolną literą, np.:

$$7 \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}$$



Zapis ten oznacza, że wyrażenie $7k$ jest wielokrotnością liczby 7 i liczby całkowitej k , czyli jest liczbą podzielną przez 7.

Zadania — dowody dotyczące podzielności liczb

ZADANIE 76

zadanie do analizy

2 pkt

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy kolejne liczby. Każda liczba jest większa od poprzedniej o 1.

n — pierwsza liczba całkowita
 $n + 1$ — druga liczba całkowita
 $n + 2$ — trzecia liczba całkowita

2° Zapisujemy sumę liczb i redukujemy.

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 =$$

3° Wyłączamy liczbę 3 przed nawias.

$$= 3(n + 1) =$$

4° Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy nawias literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$$= 3 \underbrace{(n + 1)}_{k \in \mathbb{C}} = 3k$$

5° Sumę trzech kolejnych liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej, więc suma ta jest podzielna przez 3.

ZADANIE 77

zadanie ze wskazówkami

2 pkt

Wykaż, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 5.

ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy pięć kolejnych liczb całkowitych.

2° Zapisujemy sumę kwadratów tych liczb.

3° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

4° Redukujemy wyrazy podobne.

DOWODY I ZADANIA NA WYKAZYWANIE

W książce znajdziesz wiele dowodów i zadań na wykazywanie. Jest to ten typ zadań, który sprawia uczniom z reguły najwięcej trudności.

Ucząc się jednak zgodnie ze wskazówkami, będziesz w stanie opanować rozwiązywanie nawet takich zadań, które zawsze wydawały Ci się zbyt trudne.

Wszystkie zadania są dokładnie wytłumaczone, a dzięki kolejnym, podobnym zadaniom, które robisz samodzielnie, utrwalasz sobie sposób rozwiązywania.

3

Funkcje

NIEZBĘDNA TEORIA PRZEJRZYŚCIE WYJAŚNIONA

Na początku każdego działu znajdziesz niezbędną teorię, czyli najważniejsze wzory, twierdzenia i definicje.

Cała teoria oparta jest na konkretnych przykładach, pogrupowana, usystematyzowana i ułożona tak, by jak najłatwiej było Ci ją zrozumieć i zapamiętać.

Podstawowe wiadomości o funkcjach

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
FUNKCJA	Funkcja ze zbioru X w zbiór Y to przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X (dziedziny) dokładnie jednego elementu zbioru Y (przeciwdziedziny funkcji).	
ARGUMENT FUNKCJI	Elementy dziedziny nazywamy argumentami.	
WARTOŚĆ FUNKCJI	Elementy zbioru Y , które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy wartościami funkcji. Tworzą one zbiór wartości funkcji.	
	Aby określić funkcję, należy podać zbiór X i Y oraz regułę, według której argumentom ze zbioru X przyporządkujemy wartości funkcji.	
	Funkcje zazwyczaj oznaczamy małymi literami, np.: f, g, h .	

Ogólne własności funkcji

ZAPIS SYMBOLICZNY FUNKCJI:

OPIS	$y = f(x)$	DZIEDZINA FUNKCJI TO:	zbiór X
PRZYKŁAD	$y = 2x + 3$ lub $f(x) = 2x + 3$		$x \in \langle -2; 5 \rangle$

Zbiór WARTOŚCI funkcji TO:

OPIS	zbiór Y	MIĘSCA ZEROWE FUNKCJI TO:	x_0 to współrzędna x punktu, w którym wykres przecina oś OX .	
PRZYKŁAD		$y \in \langle -2; 4 \rangle$		$x_0 = -1$ i $x_0 = 4$

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI:

DEFINICJA	W pewnym przedziale zawartym w dziedzinie funkcja jest:	rosnąca	gdy wraz ze wzrostem argumentów ($x_1 < x_2$)	rosną wartości ($f(x_1) < f(x_2)$).
		malejąca		maleją wartości ($f(x_1) > f(x_2)$).
		stała	wartości są stałe ($f(x_1) = f(x_2)$).	
PRZYKŁAD		funkcja malejąca $f(x) \searrow \Leftrightarrow x \in \langle -2; -\frac{1}{2} \rangle$ funkcja stała $f(x) \rightarrow \Leftrightarrow x \in \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$ funkcja rosnąca $f(x) \nearrow \Leftrightarrow x \in \langle 3; 5 \rangle$		

RODZAJE FUNKCJI:

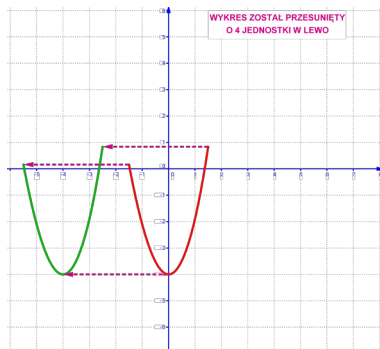
np. funkcja liniowa, kwadratowa, wielomianowa, wymierna, trygonometryczna, logarymiczna, wykładnicza, potęgowa.

Przekształcenia równoległe wykresu funkcji

PRZYKŁAD 1

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OX:
 $y = f(x + p)$

Wykres funkcji należy przesunąć równoległe wzdłuż osi OX.

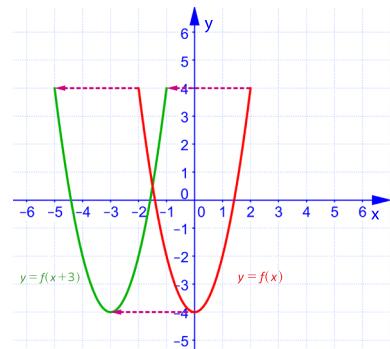


Wykres został przesunięty o 4 jednostki w prawo.

$$p = -4$$

Jeśli $p < 0$, to przesuwamy w prawo.

PRZYKŁAD 2



Wykres został przesunięty o 3 jednostki w lewo.

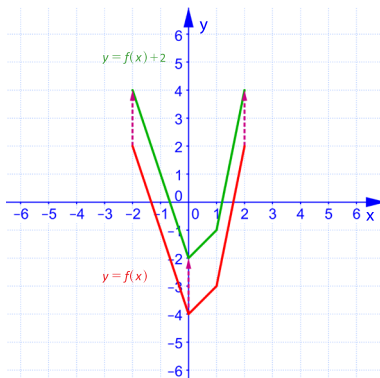
$$p = 3$$

Jeśli $p > 0$, to przesuwamy w lewo.

PRZYKŁAD 3

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OY:
 $y = f(x) + q$

Wykres funkcji należy przesunąć równoległe wzdłuż osi OY.

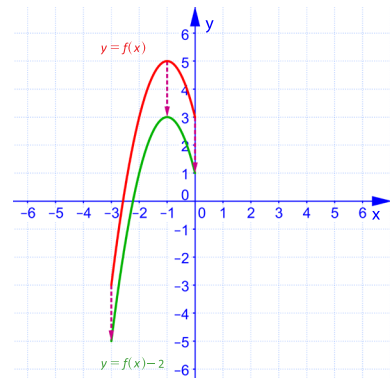


Wykres został przesunięty o 2 jednostki w górę.

$$q = 2$$

Jeśli $q > 0$, to przesuwamy w górę.

PRZYKŁAD 4



Wykres został przesunięty o 2 jednostki w dół.

$$q = -2$$

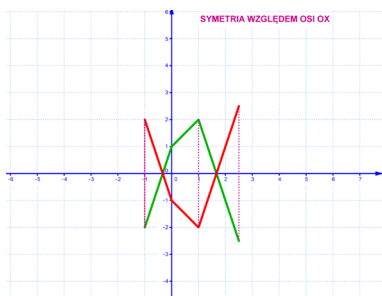
Jeśli $q < 0$, to przesuwamy w dół.

Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych

PRZYKŁAD

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI OX:
 $y = -f(x)$

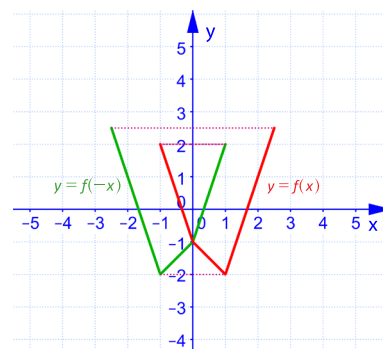
Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OX.



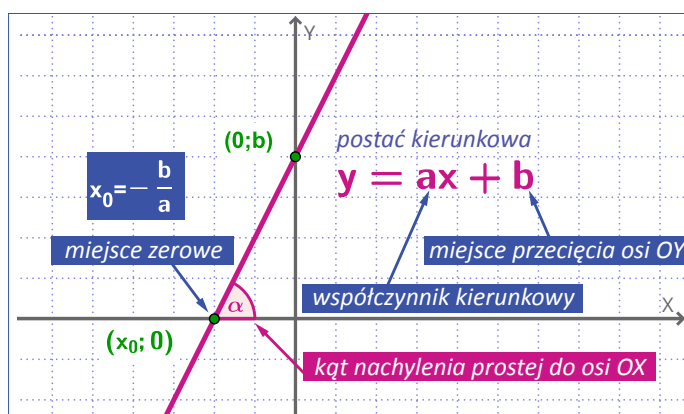
SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI OY:
 $y = f(-x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OY.

PRZYKŁAD



Wykres i własności funkcji liniowej



NAJWAŻNIEJSZE POSTACI FUNKCJI LINIOWEJ

postać kierunkowa	$y = ax + b$
postać ogólna	$Ax + By + C = 0$, współczynniki A i B nie są jednocześnie zerami

WŁASNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA KIERUNKOWEGO a

$a = \text{tg } \alpha$, gdzie kąt α oznacza kąt między wykresem funkcji a osią OX

↑
patrz rysunek

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ

zależy od współczynnika kierunkowego a

$a > 0$	funkcja jest rosnąca
$a = 0$	funkcja jest stała
$a < 0$	funkcja jest malejąca

PUNKTY PRZECIĘCIA WYKRESU FUNKCJI LINIOWEJ Z OSIAMI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

współczynnik b	miejsce przecięcia osi OY w punkcie $(0; b)$
miejsce zerowe	<ul style="list-style-type: none"> dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$ (jego postać: $x_0 = -\frac{b}{a}$) nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = b = 0$ brak miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$

Aby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa różne punkty należące do wykresu i przeprowadzić przez nie prostą. W szczególności można znaleźć przecięcia z osiami układu współrzędnych: z osią OX (miejsce zerowe) oraz z osią OY .

PROSTE PROSTOPADŁE I RÓWNOLEGŁE

Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y = a_1x + b_1$ oraz $l: y = a_2x + b_2$, to:

Prosta k jest **równoległa** do l ($k \parallel l$), jeśli $a_1 = a_2$, czyli oba współczynniki kierunkowe są takie same.

np.: $y = 2x + 3$ oraz $y = 2x - 7$ są równoległe

Prosta k jest **prostopadła** do l ($k \perp l$), jeśli $a_2 = -\frac{1}{a_1}$, $a_1 \neq 0$, czyli jeden współczynnik jest odwrotnością drugiego z przeciwnym znakiem.

np.: $y = 3x - 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 4$ są prostopadłe, ponieważ odwrotnością 3 z przeciwnym znakiem jest $-\frac{1}{3}$

Jeśli funkcja liniowa jest stała (tzn. $y = b$), to prosta prostopadła nie jest już funkcją liniową, lecz prostą o równaniu $x = c$.

Wykres i własności funkcji kwadratowej

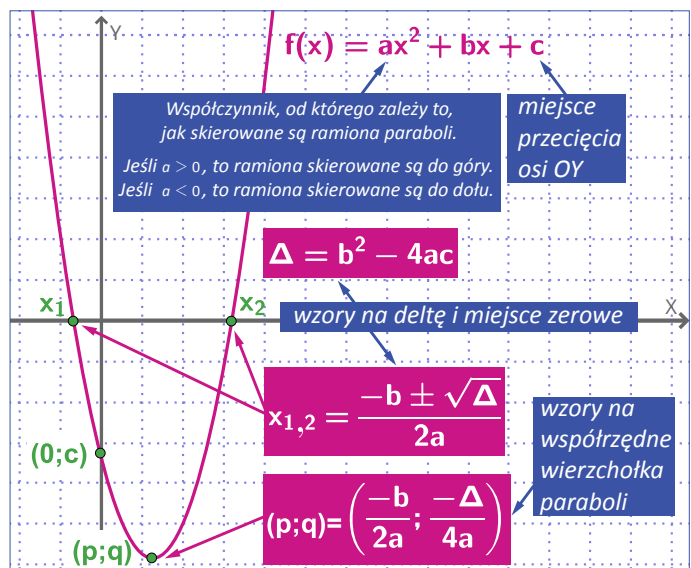
TRZY POSTACI FUNKCJI KWADRATOWEJ

postać ogólna	$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	
postać kanoniczna	$f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$ i (p, q) to współrzędne wierzchołka paraboli	
postać iloczynowa	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$ i x_1, x_2 są miejscami zerowymi (pierwiastkami) funkcji	
MIEJSCA ZEROWE FUNKCJI KWADRATOWEJ Liczba rozwiązań (pierwiastków), inaczej: miejsc zerowych, zależy od delty. Jeżeli:	$\Delta > 0$	parabola ma dwa różne miejsca zerowe
	$\Delta = 0$	parabola ma jedno miejsce zerowe (podwójny pierwiastek)
	$\Delta < 0$	parabola nie ma miejsc zerowych

WYKRES FUNKCJI KWADRATOWEJ

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Funkcja ma oś symetrii w punkcie $x = p$.

W celu narysowania paraboli potrzebujemy następujących punktów (patrz rysunek obok): miejsca zerowe (pod warunkiem, że istnieją), wierzchołek paraboli oraz współrzędne przecięcia osi.



Zadania — wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego

ZADANIE 226

zadanie do analizy

ŁATWE DO PRZYSWOJENIA PARTIE MATERIAŁUW ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_2 = 5$ i $a_7 = 20$

W każdym z działów wyodrębniliśmy podstawowe typy zadań, których można spodziewać się na maturze.

A. 3

B. 14

C. 17

D. 15

ROZWIĄZANIE

1° W ciągu arytmetycznym każdy wyraz różni się od następnego o stałą wartość (różnicę r). Gdy mamy wyraz a_2 i a_7 , to te wyrazy różnią się o pięć różnic.

2° Podstawiamy za $a_2 = 5$ i za $a_7 = 20$ i obliczamy r .

POWTÓRKI W TRZECH KROKACH

Aby zapamiętać sposób rozwiązywania określonego typu zadań, stosujemy zasadę trzech kroków.

$$5r = 20 - 5$$

$$5r = 15 \quad | : 5$$

$$r = 3$$

$$a_5 = a_2 + 3r = 5 + 3 \cdot 3 = 5 + 9 = 14$$

KROK 1

W pierwszym zadaniu analizujesz sposób rozwiązania.

ZADANIE 227

zadanie ze wskazówkami

1 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 12$ i $a_5 = 38$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

A. 14

B. -1

C. -14

D. -26

ROZWIĄZANIE

1° W ciągu arytmetycznym każdy wyraz różni się od następnego o stałą wartość (różnicę r). Gdy mamy wyraz a_3 i a_5 , to znaczy, że wyrazy te różnią się o dwie różnice.

2° Podstawiamy za $a_3 = 12$ i za $a_5 = 38$ i obliczamy

KROK 2

Drugie zadanie, które jest bardzo podobne, rozwiązujesz samodzielnie, korzystając ze wskazówek.

3° Pierwszy wyraz obliczamy, odejmując od a_3 dwie różnice.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 228

zadanie sprawdzające

1 pkt

W ciągu arytmetycznym piąty wyraz jest równy 15, a jedenasty jest równy 33. Różnica tego ciągu jest równa:

A. 6

B. 3

C. -3

D. 18

ROZWIĄZANIE

KROK 3

Ostatnie, trzecie zadanie, rozwiązujesz już całkowicie samodzielnie, opierając się na sposobie pokazanym wcześniej.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

Zadania – wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji

ZADANIE 262	zadanie do analizy	1 pkt	CKE
-------------	--------------------	-------	-----

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Wtedy:

A. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

B. $\sin \alpha = \frac{5}{3}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}$

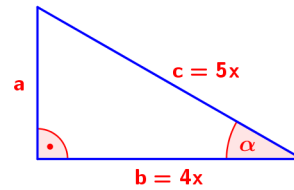
C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

D. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α .

2° Jeżeli $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, to znaczy, że zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej jest równy 4 : 5. Oznaczamy długości odpowiednich boków jako $4x$ i $5x$.



3° Trzeci bok oznaczamy jako a . Jego długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + (4x)^2 &= (5x)^2 \\ a^2 + 16x^2 &= 25x^2 \\ a^2 &= 25x^2 - 16x^2 \\ a^2 &= 9x^2 \\ a &= \sqrt{9x^2} = 3x \end{aligned}$$

4° Obliczamy wartość sinusa i tangensa dla kąta α .

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

ZADANIE 263	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	CKE
-------------	------------------------	-------	-----

Jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{2 - \cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$ równa się:

A. -1

B. $-\frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α .

2° Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, to znaczy że, zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przyległej jest równy 3 : 4. Oznaczamy długości odpowiednich boków jako $3x$ i $4x$.

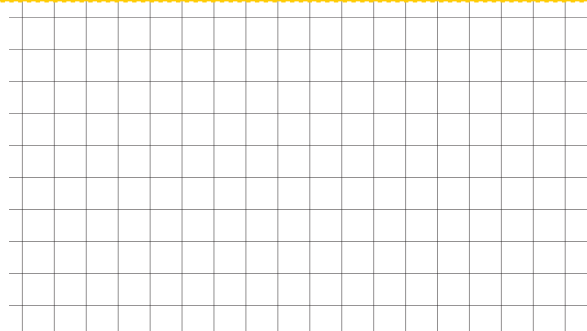
3° Trzeci bok oznaczamy jako c . Jego długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

4° Obliczamy wartość $\cos \alpha$.

5° Obliczamy wartość wyrażenia $\frac{2 - \cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$.

UCZYSZ SIĘ TEGO, CO WYMAGANE I PRAWDOPODOBNE NA MATURZE

W książce znajdują się zarówno zadania autorskie, jak i zadania z matur i propozycji Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, dzięki czemu uczysz się tego, co jest wymagane i najbardziej prawdopodobne na maturze.



POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

6

Trygonometria

— rozwiązania zadań ze wskazówkami i sprawdzających

**ODPOWIEDZI DO WSZYSTKICH ZADAŃ
WYJAŚNIONE „KROK PO KROKU”**

Odpowiedzi do zadań ze wskazówkami i sprawdzających, które rozwiązywałeś samodzielnie, znajdziesz kilka stron dalej.

- Rozwiązania — obliczanie wartości funkcji z definicji

ROZWIĄZANIE ZADANIA 257

1 pkt

sierpień 2012

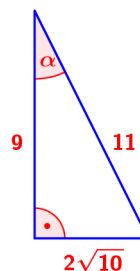
W trójkącie prostokątnym dane są długości boków (zobacz rysunek). Wtedy:

A. $\cos \alpha = \frac{9}{11}$

C. $\sin \alpha = \frac{11}{2\sqrt{10}}$

B. $\sin \alpha = \frac{9}{11}$

D. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$



ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z definicji poszczególnych funkcji.

1.1° Sinus to stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$$

1.2° Cosinus to stosunek długości przyprostokątnej przyległej do przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{9}{11}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ROZWIĄZANIE ZADANIA 258

1 pkt

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości 8, 15, 17. Sinus najmniejszego kąta jest równy:

A. $\frac{8}{17}$

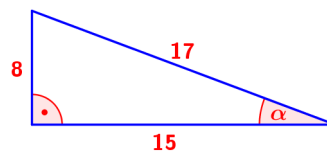
B. $\frac{17}{8}$

C. $\frac{15}{17}$

D. $\frac{17}{15}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy. Najmniejszy kąt znajduje się naprzeciwko najkrótszego boku, czyli naprzeciwko boku o długości 8.



2° Korzystamy z definicji funkcji sinus — jest to stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

7

Podsumowanie

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzednich działów. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.



GOTOWE POWTÓRKI PO KAŻDYM DZIALE

Po każdym dziale znajduje się podsumowanie, w którym są zarówno zadania z danego działu, jak i wszystkich poprzednich, dzięki czemu systematycznie powtarzasz i utrwalasz swoją wiedzę.

W przypadku problemów skorzystaj ze wskazówki. W przypadku podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu.

WERSJA ON-LINE POLICZY TWOJE PUNKTY

Kod QR przeniesie Cię do wersji on-line podsumowania na stronie jakzdacmaturezmatematyki.pl, gdzie będziesz mógł sprawdzić uzyskany przez Ciebie wynik.

ZAD. P.7.2 (0-1) Wyrażenie $x(x-3)(x+3)$ jest równe:

- A. $x^2 - 9$ B. $x^3 - 9$ C. $x^3 - 9x$ D. $x^3 + 9x$

zobacz zad. 50

ZAD. P.7.3 (0-1) (czerwiec 2014) Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy:

- A. $\sqrt{108}$ B. $\frac{15}{2}$ C. 15 D. $\frac{\sqrt{108}}{2}$

zobacz zad. 296

ZAD. P.7.4 (0-1) Dany jest kąt ostry α i $\sin \alpha = \frac{2}{7}$. Wartość wyrażenia $\cos^2 \alpha - 1$ jest równa:

- A. $\frac{9}{7}$ B. $-\frac{4}{49}$ C. $\frac{4}{49}$ D. $\frac{46}{49}$

zobacz zad. 275

ZAD. P.7.5 (0-1) Największą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{3x}{4}$ jest:

- A. 1 B. 0 C. 2 D. -1

zobacz zad. 174

ZAD. P.7.6 (0-1) Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = 2(x+8)(x-3)$ są:

- A. $x_1 = 8, x_2 = -3$ B. $x_1 = -8, x_2 = 3$ C. $x_1 = -8, x_2 = -3$ D. $x_1 = 8, x_2 = 3$

zobacz zad. 146

ZAD. P.7.7 (0-1) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{3n+1}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

- A. $a_8 = 25$ B. $a_8 = 5\sqrt{5}$ C. $a_8 = 5\sqrt{2}$ D. $a_8 = 5$

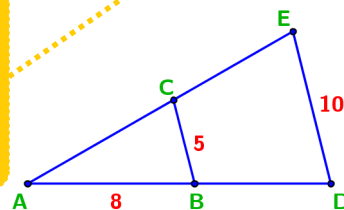
zobacz zad. 224

ZAD. P.7.8 (0-1) Odcinki BC i DE są równoległe. Długości AB, BC i DE są odpowiednio równe 8, 5 i 10. Długość odcinka BD jest równa:

- A. 16
B. 8
C. 4
D. 6

W PRZYPADKU PROBLEMÓW - WSKAZÓWKI

Jeśli masz problem z rozwiązaniem któregoś z zadań, skorzystaj ze wskazówki, która wskaże Ci zadanie podobne lub potrzebny wzór.



zobacz zad. 298

ZAD. P.7.9 (0-1) W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 13$ oraz $|AB| = 10$. Wysokość opuszczona na podstawę AB jest równa:

- A. $\sqrt{69}$ B. 12 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{194}$

zobacz zad. 286

ZAD. P.7.10 (0-1) Promień okręgu opisanego na kwadracie wynosi $7\sqrt{2}$. Obwód kwadratu wynosi:

- A. 49 B. 28 C. 196 D. 56

zobacz zad. 290



Odpowiedzi do podsumowań 1-10



PODsú MÓwanie n R 1

P. 1.1 B P. 1.2 B P. 1.3 C P. 1.4 B P. 1.5
 P. 1.11 D P. 1.12 D P. 1.13 C P. 1.14 A P. 1.15
 P. 1.21 C P. 1.22 B

WSZYSTKO MOŻESZ SPRAWDZIĆ SAMODZIELNIE

Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań z podsumowań. W przypadku dowodów zamieściliśmy również pełne rozwiązania, żebyś mógł dokładnie przeanalizować sposób rozwiązania.

PODsú MÓwanie n R 2

P. 2.1 C P. 2.2 D P. 2.3 C P. 2.4 B P. 2.5 B P. 2.6 D P. 2.7 C P. 2.8 A P. 2.9 B P. 2.10 D
 P. 2.11 B P. 2.12 B P. 2.13 A P. 2.14 C P. 2.15 A P. 2.16 C P. 2.17 D

P. 2.18 $(n+2)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot 2 \cdot n + 2^2 - n^2 = 4n + 4 = 4 \cdot \underbrace{(n+1)}_{k \in \mathbb{C}} = 4k$ Wyrażenie jest podzielne przez 4.

P. 2.19 $4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+1} - 4^n = 4^n \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^n \cdot 4 - 4^n = 16 \cdot 4^n + 12 \cdot 4^n - 4^n = 27 \cdot \underbrace{4^n}_{k \in \mathbb{C}} = 27k$

Liczba jest podzielna przez 27.

P. 2.20 $(4n+1)^2 - (4m-1)^2 = (4n)^2 + 2 \cdot 4n + 1^2 - [(4m)^2 - 2 \cdot 4m + 1^2] =$
 $= 16n^2 + 8n + 1 - (16m^2 - 8m + 1) = 16n^2 + 8n + 1 - 16m^2 + 8m - 1 =$
 $= 16n^2 + 8n + \cancel{1} - 16m^2 + 8m - \cancel{1} = 16n^2 + 8n - 16m^2 + 8m =$
 $= 8 \cdot (2n^2 + n - 2m^2 + m) = 8 \cdot \underbrace{(2n^2 + n - 2m^2 + m)}_{k \in \mathbb{C}} = 8k$

Liczba jest podzielna przez 8.

P. 2.21 $\frac{k^2 + 6k + 25}{k+3} \geq 8 \quad | \cdot (k+3)$

$$k^2 + 6k + 25 \geq 8(k+3)$$

$$k^2 + 6k + 25 \geq 8k + 24$$

$$k^2 - 2k + 1 \geq 0$$

$$(k-1)^2 \geq 0$$

Dla każdego $k \in \mathbb{R}_+$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

P. 2.22 $a^4 \geq b(2a^2 - b)$
 $a^4 \geq 2a^2b - b^2$

$$a^4 - 2a^2b + b^2 \geq 0$$

$$(a^2 - b)^2 \geq 0$$

Dla każdej liczby rzeczywistej a i b wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

P. 2.23 $11x^2 + 6xy + 3y^2 \geq 0$
 $2x^2 + \underbrace{9x^2 + 6xy + y^2}_{\geq 0} + 2y^2 \geq 0$

$$\underbrace{2x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(3x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Suma wyrażenń nieujemnych jest również nieujemna dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$, więc nierówność jest prawdziwa.

PODsú MÓwanie n R 3

P. 3.1 D P. 3.2 B P. 3.3 D P. 3.4 A P. 3.5 B P. 3.6 D P. 3.7 D P. 3.8 C P. 3.9 C P. 3.10 C
 P. 3.11 B P. 3.12 B P. 3.13 A P. 3.14 C P. 3.15 D

P. 3.16 $5^{10} + 2 \cdot 5^9 + 5^8 = 5^8(5^2 + 2 \cdot 5 + 1) = 5^8(25 + 10 + 1) = 36 \cdot \underbrace{5^8}_{k \in \mathbb{C}} = 36k$ Liczba jest więc podzielna przez 36.



Odwiedź nasz fanpage!
„Jak zdać maturę z matematyki”

JAK ZDAĆ MATURE Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

nie tylko dla humanistów!



W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!

Dariusz Kulma to nauczyciel z ponad 20-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in.:

- ✓ nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia w 2008 roku,
- ✓ jako jedyny matematyk trzykrotnie nagrodzony w ogólnopolskim konkursie Nauczyciel Roku (pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego”) — w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji”, w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem Nauczyciela Roku 2008.
- ✓ Jest pomysłodawcą i twórcą projektu **Matematyka Innego Wymiaru** — zrzeszającego ponad 20 tysięcy uczniów w kraju.
- ✓ Jest autorem piętnastu zbiorów zadań, w tym dla najmłodszych uczniów z zadaniami z krainy Kwadratolandii.
- ✓ Prowadzi fanpage „Jak zdać maturę z matematyki?”, pomagając w rozwiązywaniu zadań, udzielając porad i wskazówek przedmaturalnych.
- ✓ Jest pomysłodawcą **Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży** oraz autorem zadań konkursowych.
- ✓ Jest autorem programu nauczania matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych opracowanego w ramach projektu E-laboratorium matematyczne.



Dzięki wieloletniej pracy z młodzieżą Dariusz Kulma opracował własny system nauczania matematyki, dzięki któremu, jak twierdzą jego uczniowie, **można polubić, a przede wszystkim zrozumieć ten przedmiot**. Prowadzi zajęcia z maturzystami zarówno na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym. **Skuteczność tych metod potwierdza również średni wynik zdobyty przez jego uczniów na maturze** (poziom podstawowy): **91,45%** (2013 rok), **82,05%** (2014 rok), **89,7%** (2015 rok). **Wyniki te są wyższe o 30-40% od średniej wyników w kraju.**

OD DZIŚ, DZIĘKI TEJ KSIĄŻCE, RÓWNIEŻ I TY MOŻESZ NALEŻEĆ DO ICH GRONA!

„(...) Autor książki prowadzi uczniów przez gąszcz zagadnień matematycznych w sposób prosty i bezpieczny. Zastosowany sposób narracji pozwala spokojnie przejść przez wszystkie najistotniejsze zagadnienia matematyki szkolnej, nie tylko prezentując gotowe rozwiązania, ale — uwzględniając najnowsze osiągnięcia psychologii i pedagogiki — dbając o trwałość powtarzanej wiedzy i nabytych umiejętności.”

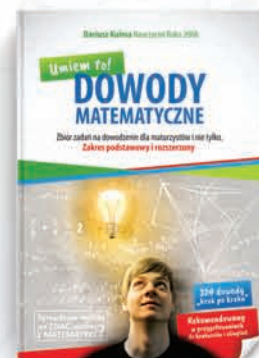
Dr Witold Pająk, Honorowy Profesor Oświaty, rzeczoznawca MEN podręczników szkolnych

NA CZYM OPIERAMY NASZ SYSTEM?

- ✓ **630 ZADAŃ** — z matur z poprzednich lat oraz zadań autorskich, w tym **411 zadań rozwiązanych krok po kroku** oraz 219 zadań zawartych w podsumowaniach.
- ✓ **NAJŁATWIEJSZE SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ** — wszystkie zadania zawierają odpowiedzi i komentarze pozwalające na prześledzenie sposobu rozwiązywania określonego rodzaju zadań.
- ✓ **WYĆWICZENIE UMIEJĘTNOŚCI** — specjalnie opracowany system pozwala na dokładne zapoznanie się z poszczególnymi zagadnieniami poprzez zadania do analizy, samodzielnie wykonywane zadania sprawdzające, a następnie podtrzymywanie wiedzy poprzez systematyczne powtórki przy pomocy podsumowań (dostępnych również jako **TESTY ON-LINE**).

Polecamy arkusze maturalne, które są ściśle powiązane z książką

NOWOŚĆ 2016 zbiór zadań na dowodzenie



← Sprawdź inne książki oraz materiały on-line na naszej stronie

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-25-8



9 788363 975258

Cena 49,00 zł



Zamówienia on-line:
www.jakzdacmaturezmatematyki.pl



Zamówienia e-mail:
elitmat@elitmat.pl



Zamówienia telefoniczne lub SMS-em:
51-77777-51