

DARIUSZ KULMA — Nauczyciel Roku 2008

KARTY PRACY Z MATEMATYKI

32 GOTOWE LEKCJE POWTÓRZENIOWE
DO MATURY NA POZIOMIE ROZSZERZONYM

część I

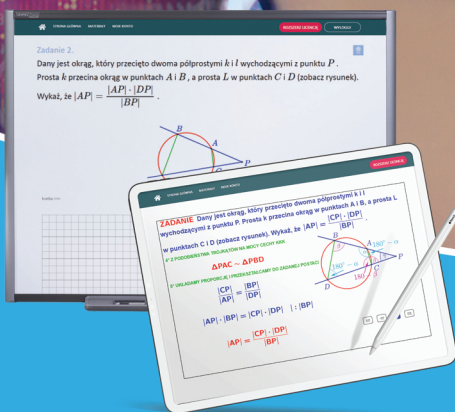
poziom
trudności

JEDYNA TAKA

Pełne
rozwiązania
"Krok po kroku"
w wersji
interaktywnej

KSIĄŻKA W POLSCE

191
zadań



Najlepsza powtórka przed maturą **2025** 2026...

JAK ZDAĆ MATURE
Z MATEMATYKI?

DARIUSZ KULMA

KARTY PRACY Z MATEMATYKI

**32 GOTOWE LEKCJE POWTÓRZENIOWE
DO MATURY NA POZIOMIE ROZSZERZONYM**

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2024

Autor:
Opracowanie redakcyjne:
Projekt graficzny okładki:
Projekt graficzny i skład komputerowy:

Dariusz Kulma
Małgorzata Zakrzewska
Ewelina Trębacz
Ewelina Trębacz, Mariusz Kulma

Druk i oprawa:

Drukarnia "KOLUMB"
ul. Kaliny 7
41-506 Chorzów

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadpodstawowych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych udostępnionych przez Centralną Komisję Edukacyjną.

Fotografia z www.stock.adobe.com: © zinkevych - id. 192934332, © BullRun - id. 354988917

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl
www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2024. Wydanie drugie.

ISBN: 978-83-63975-38-8

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy składać przez stronę:

www.jakzdacmaturezmatematyki.pl

lub na adres: elitmat@elitmat.pl

WSTĘP




Na samym początku chciałem Ci pogratulować. Zaskoczyłem Cię pewnie, bo przecież nic jeszcze nie zrobiłeś? A jednak gratuluję. Cieszę się, że podejmujesz wyzwanie dotyczące matury z matematyki na poziomie rozszerzonym. Proszę Cię jednak, byś przygotował się na to, że nie jest to droga łatwa. I chcę, żebyś miał tego świadomość. **Cel i sukces**, który jest na końcu tej drogi, będzie smakował znakomicie. Ta nagroda już na Ciebie czeka. Pomoże Ci w tym system **Z-W-S**. Co to takiego? **Zaangażowanie – Wytrwałość – Systematyczność**. Proste? Jak się to tylko czyta, to proste, ale w praktyce musimy pracować nad sobą każdego dnia. Nie da się dobrze przygotować do matury z poziomu rozszerzonego, jeśli się w to nie **zaangażujesz**. Nie będziesz wkładał w to swojego serca. I nie traktuj tego górnolotnie. Musisz zaprzyjaźnić się z matematyką i pracą z nią związaną. Wytrwałość to kolejny niezbędny element. Będziesz pewnie wiele razy miał chwilę zwątpienia. Przypominaj sobie wtedy o tym, że jak wytrwasz, to czeka Cię piękna nagroda.

I na koniec systematyczność, która łączy się z wytrwałością. Małymi krokami, ale często – taka niech będzie Twoja droga do celu. Wyznaczaj sobie momenty powtórek. Konkretny czas w tygodniu o określonych godzinach. Nic nie skracaj, wytrwaj w postanowieniu.

Oddaję w Twoje ręce dwie książki (część 1 i część 2), jakich nie ma w Polsce do poziomu rozszerzonego. **Są to pierwsze książki, które łącznie zawierają pełne rozwiązania wszystkich zadań krok po kroku w wersji interaktywnej! To takie e-książki, dzięki którym możesz się uczyć na tablecie, a nawet telefonie – w każdym miejscu, gdzie jesteś.** Nawet, jeśli nie zabrałeś ze sobą wersji papierowej. Dodatkowym atutem każdej z tych książek jest cykliczne powtarzanie tych samych zagadnień, po to, abyś nie zapominał już raz powtórzonych treści. Jeśli trafiłeś na inne moje książki z serii „Jak zdać maturę z matematyki”, to wiesz, że to działa.

A więc jak to działa? Już odpowiadam :)

W części 1 książki znajdziesz **32 karty pracy z zestawami zadań maturalnych**, za które możesz zdobyć od 12 do 16 punktów. Każdy zestaw powinieneś rozwiązywać ok. 45 minut. Tyle, co jedna szkolna lekcja. Na końcu każdej karty pracy znajdziesz też **zadanie dodatkowe**. Książka, którą trzymasz w ręku to część 1 „Kart pracy”, co oznacza, że dostępna jest również część 2, do której Cię również zachęcam. Jest ona kontynuacją części 1. Obie książki się wzajemnie uzupełniają i tak naprawdę stanowią całość, z tym, że część 2 zawiera zadania o wyższym stopniu trudności.

Część kart pracy w tej książce ułożona jest parami i zawiera zadania podobne. Tak więc karta pracy 1.1 jest podobna do 1.2, karta 2.1 jest podobna do 2.2, itd. Na czym polega to podobieństwo? Na tym, że zadanie nr 1 z karty pracy 1.1 jest podobne do zadania nr 1 z karty 1.2, zadania nr 2 z jednej i drugiej karty pracy również są podobne, itd. Przy każdym zadaniu znajduje się ikonka , po kliknięciu której w wersji online otworzy się plansza interaktywna z rozwiązaniem tego zadania. Wystarczy posłużyć się nawigacją, żeby zobaczyć kolejne kroki rozwiązania. Kartę pierwszą warto potraktować jako lekcję powtórzeniową, żeby zobaczyć jak rozwiązać poszczególne typy zadań. Kartę drugą, która jest podobna, potraktuj jako zestaw ćwiczeniowy. Rozwiąż samodzielnie zadania, a potem sprawdź odpowiedzi na końcu książki albo pełne rozwiązania w wersji online.

Od drugiego działu pojawiają się karty pracy z nr 3 – 2.3, 3.3, 4.3 itd. To **karty, które zawierają zadania również z poprzednich działów**. Podobnie robiliśmy w repetytoriach “Jak zdać maturę z matematyki”. Tu mamy jednak różnicę, ponieważ cofamy się o 3-5 działów, np. w karcie pracy 8.3 oprócz zadań z działu 8 znajdziemy zadania z działów 4 – 7.

Opis instrukcji trochę trwa, ale myślę, że warto uczyć się właśnie w ten sposób. Efekt będzie murowany. Zachęcam Cię do systematyczności. Ona powoduje, że krok po kroku, dzień po dniu będziesz bliżej celu.

I gwarantuję Ci, że pozytywnie zaskoczysz się Twoim wynikiem na maturze.

Z pozdrowieniami!

Dariusz Kulma

ZOBACZ RÓWNIEŻ POZOSTAŁE KSIĄŻKI Z SERII “KARTY PRACY”.

“Karty Pracy z matematyki do matury na poziomie podstawowym”



“Karty Pracy z matematyki do matury na poziomie rozszerzonym, cz.2” — zawierają zadania o wyższym stopniu trudności niż w części 1.

191

191 zadań – 32 GOTOWE LEKCJE powtórzeniowe do matury na poziomie rozszerzonym, ułożone działami.



PODOBNE KARTY PRACY – Dwie pierwsze karty w danym działle to karty z zadaniami podobnymi do siebie. Karta pracy 1.1 jest podobna do 1.2, karta 2.1 jest podobna do 2.2, itd.



Każda karta pracy przewidziana jest na ok. 45 minut, dokładnie tyle, ile lekcja w szkole.



PODSUMOWUJĄCE karty pracy z rozszerzeniem 3 – 2.3, 3.3, 4.3, itd. to karty, które zawierają zadania również z poprzednich działów. Podczas pracy z tymi kartami cofamy się o 3 – 5 działów, np. w karcie pracy 8.3 oprócz zadań z działu 8 znajdziemy zadania z działów 4 – 7.



Oznaczenie to wskazuje zadania dodatkowe na końcu każdej karty pracy.



WERSJA ONLINE – Wszystkie karty pracy dostępne są w wersji online, gdzie zamieszczone są planse interaktywne z rozwiązaniem każdego zadania „krok po kroku”. Karty w takiej wersji stanowią idealne narzędzie pracy dla nauczyciela w czasie lekcji, ale również mogą być wykorzystywane podczas samodzielnej nauki z książką.

Swoj INDYWIDUALNY KOD DO WERSJI INTERAKTYWNEJ znajdziesz na końcu książki w kieszonce. Wejdź na stronę www.kartypracy.jakzdamaturezmatematyki.pl i aktywuj swój dostęp.



Czerwiec 2016

Oznaczenie to wskazuje na zadanie pochodzące z danej matury CKE .

SPIS TREŚCI

Karty pracy — 32 gotowe lekcje!

	str.
1.1 LICZBY RZECZYWISTE	7
1.2 LICZBY RZECZYWISTE	10
2.1 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE	13
2.2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE	16
2.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO DWÓCH DZIAŁACH	18
3.1 FUNKCJE	21
3.2 FUNKCJE	24
3.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO TRZECH DZIAŁACH	27
4.1 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ	30
4.2 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ	33
4.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO CZTERECH DZIAŁACH	36
5.1 CIĄGI	39
5.2 CIĄGI	42
5.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO PIĘCIU DZIAŁACH	45
6.1 TRYGONOMETRIA	48
6.2 TRYGONOMETRIA	50
6.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO SZEŚCIU DZIAŁACH	52
7.1 PLANIMETRIA	55
7.2 PLANIMETRIA	58
7.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO SIEDMIU DZIAŁACH	61
8.1 GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA	64
8.2 GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA	67
8.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO OŚMIU DZIAŁACH	70
9.1 STEREOMETRIA	73
9.2 STEREOMETRIA	75
9.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO DZIEWIĘCIU DZIAŁACH	77
10.1 KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA	79
10.2 KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA	82
10.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO DZIESIĘCIU DZIAŁACH	85
11.1 OPTYMALIZACJA I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY	87
11.2 OPTYMALIZACJA I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY	89
11.3 PODSUMOWUJĄCA KARTA PRACY PO JEDENASTU DZIAŁACH	91
ODPOWIEDZI	93



KARTA PRACY 1.1

1. D 2. C 3. D 4. D 5. A 6. D 7. D

$$8. L = (\log_{36} 5) \cdot (\log_6 25) = \frac{1}{\log_5 36} \cdot \frac{\log_5 25}{\log_5 6} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{\frac{1}{2} \log_5 36} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{\frac{1}{2} a} = \frac{4}{a^2} = P$$

$$9. 7^{16} - 1 = (7^8 - 1)(7^8 + 1) = (7^4 - 1)(7^4 + 1)(7^8 + 1) = (7^2 - 1)(7^2 + 1)(7^4 + 1)(7^8 + 1) = \\ = 48 \cdot 50 \cdot (7^4 + 1)(7^8 + 1) = 2400 \cdot (7^4 + 1)(7^8 + 1) = 100 \cdot \underbrace{24 \cdot (7^4 + 1)(7^8 + 1)}_{k \in \mathbb{Z}} = 100k$$

Liczba jest podzielna przez 100.

$$10. 2020 + 2020^2 + 2020^3 + 2020^4 + \dots + 2020^9 + 2020^{10} = \\ = 2020(1 + 2020) + 2020^3(1 + 2020) + \dots + 2020^9(1 + 2020) = \\ = (1 + 2020)(2020 + 2020^3 + \dots + 2020^9) = 2021 \cdot 2020 \cdot (1 + 2020^2 + \dots + 2020^8) = \\ = \underbrace{2021 \cdot 5}_{10105} \cdot \underbrace{404 \cdot (1 + 2020^2 + \dots + 2020^8)}_{k \in \mathbb{Z}} = 10105k$$

Liczba jest podzielna przez 10105.

$$11. 10^n - 4 = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ zer}} - 4 = \underbrace{99\dots96}_{n-1 \text{ dziewiątek}} = 3 \cdot \underbrace{33\dots32}_{2k} = 6k$$

Ostatnią cyfrą liczby 33...32 jest cyfra 2, więc liczba ta jest podzielna przez 2, a wyjściowa liczba jest podzielna przez 6.

KARTA PRACY 1.2

1. D 2. C 3. B 4. B 5. A 6. A 7. D

$$8. P = \frac{2a}{1+a} = \frac{2 \log_7 10}{1 + \log_7 10} = \frac{\log_7 10^2}{\log_7 7 + \log_7 10} = \frac{\log_7 100}{\log_7 70} = \log_{70} 100 = L$$

$$9. 21^8 - 19^8 = (21^4 - 19^4)(21^4 + 19^4) = (21^2 - 19^2)(21^2 + 19^2)(21^4 + 19^4) = \\ = \underbrace{(21 - 19)}_2 \cdot \underbrace{(21 + 19)}_{40} \cdot \underbrace{(21^2 + 19^2)(21^4 + 19^4)}_{k \in \mathbb{Z}} = 80k$$

Liczba jest podzielna przez 80.

$$10. 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 + \dots + 7^{58} + 7^{59} + 7^{60} = \\ = 7 \cdot (1 + 7 + 7^2) + 7^4 \cdot (1 + 7 + 7^2) + \dots + 7^{58} \cdot (1 + 7 + 7^2) = \\ = (1 + 7 + 7^2) \cdot (7 + 7^4 + \dots + 7^{58}) = 57 \cdot \underbrace{(7 + 7^4 + \dots + 7^{58})}_{k \in \mathbb{Z}} = 57k$$

Suma jest podzielna przez 57.

$$11. L = \log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\log_y(xy)}{\log_y x} \cdot \frac{\log_x\left(\frac{y}{x}\right)}{\log_x y} = \frac{\log_y(xy)}{\frac{1}{\log_x y}} \cdot \frac{\log_x\left(\frac{y}{x}\right)}{\log_x y} = P$$

DLA MATURZYSTÓW POLECAMY POZOSTAŁE KSIĄŻKI Z SERII „JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI” AUTORSTWA DARIUSZA KULMY — NAUCZYCIELA ROKU 2008



Seria „Jak zdać maturę z matematyki” to m.in. REPETYTORIA:

- ✓ Wszystkie najważniejsze zagadnienia do NOWEJ MATURY — wzory, definicje, twierdzenia z przykładami opracowane według aktualnej podstawy programowej.
- ✓ Łącznie 1514 ZADAŃ — 722 zadania na poziomie podstawowym oraz 792 zadania na poziomie rozszerzonym (w tym zadania na dowodzenie i wykazywanie).
- ✓ Rozwiązania „krok po kroku”, wskazówki i komentarze — które wytłumaczą Ci każde zadanie jak najlepszy korepetytor.
- ✓ Podsumowania — które systematycznie porządkują Twoją wiedzę, również w wersji on-line (NOWOŚĆ).



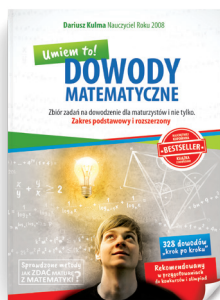
ARKUSZE MATURALNE NA POZIOBIE PODSTAWOWYM I ROZSZERZONYM

- ✓ ARKUSZE MATURALNE — opracowane na podstawie oficjalnych arkuszy Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.
- ✓ Łącznie 423 ZADANIA z aktualnej podstawy programowej — 252 zadań na poziomie podstawowym oraz 171 zadań na poziomie rozszerzonym.
- ✓ Odpowiedzi do wszystkich zadań.
- ✓ Pełne rozwiązania do zadań sprawiających maturzystom największą trudności, np. dowodów.



„DOWODY MATEMATYCZNE — UMIEM TO! Zbiór zadań na dowodzenie dla maturzystów i nie tylko”.

- ✓ 328 DOWODÓW — na poziomie podstawowym i rozszerzonym.
- ✓ Rozwiązania „krok po kroku” do wszystkich zadań.
- ✓ Rekomendowana w przygotowaniach do konkursów i olimpiad matematycznych.
- ✓ Każde zadanie oznaczone poziomem trudności.
- ✓ Wskazówki do zadań do samodzielnego wykonania.



„101 ZADAŃ DLA AMBITNYCH MATURZYSTÓW. Zbiór zadań trudnych, ciekawych i nietypowych z matematyki na poziomie rozszerzonym”.

- ✓ Zawiera "zadania multidziałowe", czyli takie, które zawierają zagadnienia z wielu działów — nawet z czterech czy pięciu.
- ✓ Wskazówki do wszystkich zadań wraz z pełnymi rozwiązaniami „krok po kroku”.
- ✓ Twierdzenia i wzory, których nie ma w podstawie programowej, a dzięki którym można rozwiązać zadanie szybciej!



Więcej informacji: jakzdacmaturezmatematyki.pl/ksiazka

KARTY PRACY Z MATEMATYKI

32 GOTOWE LEKCJE POWTÓRZENIOWE DO MATURY NA POZIOMIE ROZSZERZONYM

Dariusz Kulma to nauczyciel z ponad 20-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in. nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia oraz tytułem Nauczyciela Roku 2008 w ogólnopolskim konkursie organizowanym pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i "Głosu Nauczycielskiego".



W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!



Jest autorem serii książek dla maturzystów oraz kilkunastu zbiorów z zadaniami konkursowymi. Jest twórcą wielu projektów edukacyjnych, w tym m.in. „Matematyki Innego Wymiaru”, „Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży” czy „E-laboratorium matematycznego”. W ramach projektu „Jak zdać maturę z matematyki?” prowadzi warsztaty motywacyjne dla maturzystów, wspierając młodzież w przygotowaniach maturalnych. Jest również szkoleniowcem i wykładowcą podczas wielu konferencji dla nauczycieli matematyki w Polsce.

CZYM WYRÓŻNIA SIĘ TA KSIĄŻKA?

“Karty Pracy z matematyki” to pierwsza taka seria książek, która zawiera pełne rozwiązania wszystkich zadań „krok po kroku” w wersji interaktywnej. To e-książki, dzięki którym możesz się uczyć na tablecie, a nawet telefonie – w każdym miejscu, gdzie jesteś. Dodatkowym atutem każdej z tych książek jest cykliczne powtarzanie tych samych zagadnień, abyś nie zapomniał już raz powtórzonych treści. Wejdź na stronę www.kartypracy.jakzdamaturezmatematyki.pl i aktywuj swój dostęp, korzystając z indywidualnego kodu, który znajdziesz na końcu książki.



Wersja on-line na stronie www.kartypracy.jakzdamaturezmatematyki.pl



32 gotowe lekcje do matury

191

Pełne rozwiązania w wersji interaktywnej



Podsumowujące karty pracy

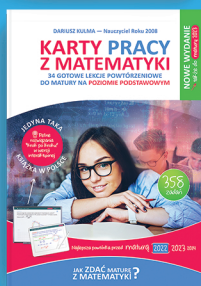
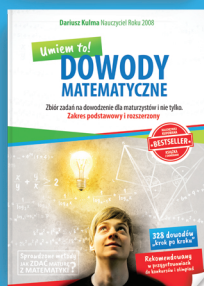


Zadania dodatkowe do każdej karty pracy



Zawiera zadania trudniejsze w stosunku do cz. I

Sprawdź inne książki oraz materiały on-line na naszej stronie



Zamówienia:
@ elitmat@elitmat.pl
📞 51-77777-51
🌐 www.jakzdamaturezmatematyki.pl



Karty pracy są ściśle powiązane z książkami z serii "Jak zdać maturę z matematyki?"

Zobacz również pozostałe książki z serii "Karty Pracy"

ISBN 978-83-63975-38-8



9 788363 975388

Cena 54,00 zł