Dariusz Kulma Nauczyciel Roku 2008

Umiem to!

DOWODY MATEMATYCZNE

Zbiór zadań na dowodzenie dla maturzystów i nie tylko.

Zakres podstawowy i rozszerzony

324 dowody „krok po kroku"

Rekomendowany w przygotowaniach do konkursów i olimpiad

Sprawdzone metody JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI?

Dariusz Kulma - Nauczyciel Roku 2008

Umiem to!

DOWODY MATEMATYCZNE

Zbiór zadań na dowodzenie dla maturzystów i nie tylko.

Zakres podstawowy i rozszerzony

Wydawnictwo ELITMAT
Mińsk Mazowiecki 2016

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**, **Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:

Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografia na okładce z www.fotolia.com: © agsandrew - id. 42076089; © agsandrew - id. 67791553; © agsandrew - id. 68928702;

Wydanie: **Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma**

Plac Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl , www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2016. Wydanie pierwsze.
ISBN: 978-83-63975-23-4

WSTĘP

Dowody matematyczne to w powszechnym rozumieniu taka matematyczna osobliwość — niekoniecznie dostępna dla każdego. Wielu uważa, że zadania z dowodzenia, wykazywania, uzasadniania są bardzo trudne. Niektórzy powiedzą nawet, że dowody są niepotrzebne. Często także na lekcjach matematyki zadania tego typu są pomijane przez nauczycieli, którzy twierdzą, że są one za trudne, by uczniowie mogli je zrozumieć. Chciałbym Cię przekonać, że jest zupełnie inaczej, a świat matematycznego dowodzenia to piękna kraina, gdzie rozwijasz swoją kreatywność, budujesz matematyczną dojrzałość i zdobywasz analityczne doświadczenie. Dzięki zrozumieniu dowodów matematycznych nauczysz się uogólniać zależności, które obserwujesz, i będziesz mógł stwierdzić, że taka czy inna zależność jest zawsze prawdziwa. Uwierz mi, że to nie koniec korzyści, które można byłoby tu wymieniać bez końca. Przy dowodzeniu, częściej niż w innych rodzajach zadań matematycznych, pojawiają się niezliczone pytania, takie jak: Skąd? Dlaczego? Po co? Czy na pewno? Na podstawie czego? Stawianie pytań i szukanie na nie odpowiedzi można spuentować jednym stwierdzeniem: To uczy logicznego myślenia.

Nie bój się dowodów matematycznych. Najtrudniej będzie zacząć. Ale pamiętaj — bez pierwszego kroku nie ma drugiego i kolejnych. Po rozwiązaniu kilku zadań na wykazywanie zauważysz, że można się tego nauczyć, a co więcej — można nawet to polubić. Wiem, że teraz mi nie wierzysz, ale zapewniam Cię: tak będzie.

Zadania zamieszczone w książce są przeznaczone przede wszystkim dla uczniów szkół średnich z obu poziomów. W arkuszu maturalnym z poziomu podstawowego, a tym bardziej rozszerzonego zawsze znajdziemy kilka dowodów matematycznych. Bardzo często są to dowody geometryczne lub zadania dotyczące wykazywania nierówności i dlatego tego typu zadań w tej książce znajdziesz najwięcej. Jeśli ktoś myśli o bardzo dobrych wynikach na maturze z matematyki, to niezależnie od poziomu — musi nauczyć się dowodzenia i wykazywania. Wiele dowodów może bez problemu przeprowadzić również uczeń gimnazjum. Materiał zawarty w książce może być znakomitym treningiem przygotowującym do konkursów i olimpiad matematycznych.

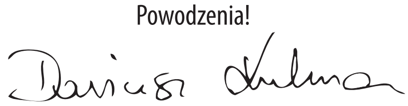
Twierdzenia matematyczne najczęściej dowodzimy wprost lub nie wprost. W tym zbiorze zadań skupimy się głównie na dowodzeniu wprost. Można prowadzić dowodzenie, wykorzystując również indukcję matematyczną, ale pojawia się ona dopiero na wybranych kierunkach studiów i dlatego tutaj ją pominiemy.

Dowód wprost polega na tym, że w oparciu o założenia przeprowadzamy rozumowanie zgodne z zasadami logiki oraz stosujemy aksjomaty i twierdzenia matematyczne, aby zbadać prawdziwość przyjętej tezy. Jednym z najczęstszych błędów jest mylenie tezy z założeniami. Koniecznie zwróć uwagę, na czym możesz się oprzeć (jakie założenia masz do dyspozycji), a co masz udowodnić (jaka jest teza, której prawdziwości masz dowieść). Obrazuje to przykład w poniższej tabeli:

TWIERDZENIE	PRZYKŁAD
Twierdzenie w matematyce to pewien sąd o obiektach matematycznych. Podstawowa forma twierdzenia to: „Jeśli . . . , to . . . ”. Wszystko, co znajduje się pomiędzy słowami „jeśli” i „to”, nosi nazwę założenia twierdzenia, natomiast wszystko, co znajduje się po słowie „to”, nosi nazwę tezy twierdzenia. O prawdziwości twierdzenia decyduje dowód matematyczny. Wystarczy, że taki dowód istnieje.	Rozważmy twierdzenie: „W każdym rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym”. To twierdzenie nie jest podane w formie podstawowej, ale na taką formę można je przekształcić: „Jeśli czworokąt jest rombem, to jego przekątne przecinają się pod kątem prostym”. Założenie: „Czworokąt jest rombem”. Teza: „W czworokącie przekątne przecinają się pod kątem prostym”.

W niniejszym zbiorze dowody są podzielone na dziesięć tematycznych rozdziałów. Każdy z nich składa się z trzech części. W pierwszej analizujesz poszczególne typy zadań na dowodzenie z przykładowymi rozwiązaniami omówionymi krok po kroku. W drugiej przeprowadzasz dowody samodzielnie, opierając się na tym, czego dowiedziałeś się w rozdziale pierwszym. Możesz również posłużyć się wskazówką, którą znajdziesz przy określonym dowodzie. Wskazówką jest rozwiązanie konkretnego dowodu z rozdziału pierwszego. W części trzeciej znajdziesz pełne rozwiązania do zadań z rozdziału drugiego. Pamiętaj, że są to tylko rozwiązania przykładowe. Twoje mogą być inne, ale efekt dowodzenia musi być taki sam.

Powodzenia!



SPIS TREŚCI

zobacz dowód 1

DOWÓD 34 **R**

Przy każdym z dowodów znajdują się oznaczenia: „P”— dla zadań z poziomu podstawowego oraz „R”— dla zadań z poziomu rozszerzonego. Przy zadaniach do samodzielnego wykonania, na marginesie, znajdziesz numer dowodu, który będzie wskazówką do rozwiązania.

TROCHĘ TEORII

Na początku lub w trakcie rozdziału znajdziesz przypomnienie teorii, która pomoże Ci w rozwiązywaniu zadań.

Dodatkowe informacje, komentarze oraz errata dostępne na stronie: jakzdacmaturezmatematyki.pl/errata

1 DOWODY DOTYCZĄCE PODZIELNOŚCI

DOWÓD 22 **R** Wykaż, że liczba $5^{300} - 3 \cdot 5^{200} - 5^{100} + 3$ jest podzielna przez 48.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wprowadzamy zmienną t i rozkładamy otrzymane wyrażenie do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.

Niech $5^{100} = t$

$$t^3 - 3t^2 - t + 3 = t^2(t-3) - (t-3) = (t-3)(t^2-1) =$$
$$= (t-3)(t-1)(t+1) =$$

2° Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych, ponieważ ostatnimi cyframi wyrażeń $5^{100} - 3$, $5^{100} - 1$ oraz $5^{100} + 1$ są zawsze kolejne cyfry parzyste.

$$= \underbrace{(5^{100}-3)}_{2k}\underbrace{(5^{100}-1)}_{2k+2}\underbrace{(5^{100}+1)}_{2k+4,\ k\in\mathbb{C}} = 2k(2k+2)(2k+4) =$$

3° Wyłączamy z obu nawiasów liczbę 2. Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, ponieważ wśród tych liczb jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3, czyli całe wyrażenie dzieli się przez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 48$.

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{k(k+1)(k+2)}_{6k,\ k\in\mathbb{C}} = 48k$$

W PEŁNI ROZWIĄZANE ZADANIA

Zbiór zadań został podzielony na 10 tematycznych rozdziałów.

W pierwszej części każdego rozdziału znajdują się w pełni rozwiązane zadania z komentarzem i dokładnym wyjaśnieniem kolejnych kroków rozwiązania.

Wszystkich zadań w tej części jest 161.

DOWÓD 152 **R** Dany jest ciąg geometryczny $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$, którego wszystkie wyrazy są dodatnie. Wykaż, że prawdziwe jest równanie $\sqrt[100]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}} = \sqrt{a_1 \cdot a_{100}}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zacznijmy od lewej strony równania. Każdy wyraz ciągu geometrycznego możemy przekształcić do postaci: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

$$L = \sqrt[100]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}} = \sqrt[100]{a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 q^{99}} =$$

2° Porządkujemy iloczyn.

$$= \sqrt[100]{a_1^{100} \cdot q^{1+2+\ldots+99}} =$$

3° Wyrazy sumy wykładników $1 + 2 + \ldots + 99$ tworzą ciąg arytmetyczny. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 50 \cdot 99 = 4950$$

4° Podstawiamy otrzymaną wartość i przekształcamy do żądanej postaci, znajdującej się po prawej stronie równania.

$$= \sqrt[100]{a_1^{100} \cdot q^{4950}} = a_1 \cdot q^{49\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(a_1 \cdot q^{49\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{a_1^2 \cdot q^{99}} =$$
$$= \sqrt{a_1 \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{99}}_{a_{100}}} = \sqrt{a_1 \cdot a_{100}} = P$$

TROCHĘ TEORII | **WŁASNOŚĆ WYRAŻEŃ NIEUJEMNYCH**

TROCHĘ TEORII

Zbiór zadań zawiera również niezbędną teorię, która pomoże Ci w rozwiązywaniu zadań.

Części teoretyczne znajdują się na początku rozdziałów jak również przez przed zadaniami określonego typu, wymagającymi dodatkowej wiedzy lub wzorów.

Zauważmy, że:

$5^2 \geq 0$, ponieważ $25 \geq 0$

$(-3)^2 \geq 0$, ponieważ $9 \geq 0$

$(\sqrt{2})^2 \geq 0$, ponieważ $2 \geq 0$

$0^2 \geq 0$, ponieważ $0 \geq 0$

$(2-\sqrt{2})^2 \geq 0$, ponieważ $(2-\sqrt{2})^2 \approx 0{,}35 \geq 0$

Oznacza to, że kwadrat sumy lub różnicy dowolnych liczb rzeczywistych jest wyrażeniem nieujemnym.

$(x+y)^2 \geq 0 \quad (x-y)^2 \geq 0 \quad x,y \in \mathbb{R}$

Wiele dowodów opiera się na tej zależności. Jednym z najbardziej podstawowych dowodów w wyrażeniach algebraicznych jest zależność:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+} x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Udowodnimy tę zależność algebraicznie oraz wskażemy interpretację graficzną.

DOWÓD ALGEBRAICZNY

Wykaż, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ zachodzi zależność $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad |\cdot x$ ($x > 0$, więc znak nierówności nie zmienia się)

$x^2 + 1 \geq 2x$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq 0$

Kwadrat różnicy jest zawsze nieujemny: $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+} (x-1)^2 \geq 0$.

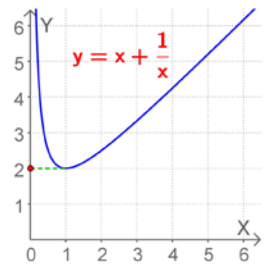
To bardzo ważna zależność, do której wielokrotnie będziemy się odwoływać.

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+}$ — czytamy jako: „Dla każdego x ze zbioru liczb rzeczywistych dodatnich".

Analogicznie możemy zapisać: $\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}_+} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Uogólniając, możemy podać twierdzenie, że suma dodatnich liczb odwrotnych jest większa bądź równa 2.

INTERPRETACJA GRAFICZNA



Wykres funkcji $y = x + \frac{1}{x}$ również dowodzi, że $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

DOWÓD 181 | **P** Wykaż, że nierówność $2x^2 - 6xy + 11y^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego $x,\ y \in \mathbb{R}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° W pierwszej kolejności zwracamy uwagę, który z wyrazów może być podwojonym iloczynem kwadratu sumy lub kwadratu różnicy. W tym przypadku podwojonym iloczynem jest $-6xy$.

2° Rozkładamy więc poszczególne wyrażenia tak, aby uzyskać kwadrat różnicy.

$$2x^2 - 6xy + 11y^2 \geq 0$$

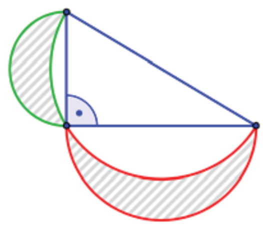
$$x^2 + x^2 - 6xy + 9y^2 + 2y^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-3y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0$$

3° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy sumę wyrażeń nieujemnych, która jest również nieujemna dla każdego $x,y \in \mathbb{R}$, więc nierówność jest prawdziwa.

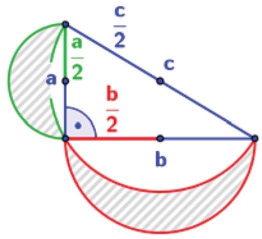
DOWÓD 246 **P**

Dany jest trójkąt prostokątny. Na każdym z boków narysowano półokręgi (zobacz rysunek). Wykaż, że pole zakreskowanych obszarów, zwanych księżycami Hipokratesa, równe jest polu trójkąta.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku pomocniczym oznaczamy boki trójkąta. Promienie półokręgów są połowami długości poszczególnych boków trójkąta.



2° Można zauważyć, że pole obu półksiężyców obliczymy, jeśli od sumy pól obu półkoli opartych na przyprostokątnych trójkąta i pola tego trójkąta odejmiemy pole półkola opartego na przeciwprostokątnej.

$$P_K = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2}{8}\pi + \frac{b^2}{8}\pi + \frac{1}{2}ab - \frac{c^2}{8}\pi =$$

3° Wyłączamy liczbę $\frac{\pi}{8}$ przed nawias.

$$= \frac{\pi}{8}(\underbrace{a^2+b^2}_{c^2} - c^2) + \frac{1}{2}ab =$$

4° Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że: $a^2+b^2=c^2$. Po podstawieniu za $c^2=a^2+b^2$ i redukcji otrzymujemy wartość pola trójkąta prostokątnego.

$$= \frac{\pi}{8}\underbrace{(c^2-c^2)}_{0} + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab = P_{\triangle}$$

POZIOM TRUDNOŚCI

Przy każdym zadaniu wskazany jest poziom trudności – podstawowy lub rozszerzony. Jest to informacja dla uczniów, które zadania obowiązują na danym pozio mie.

Osoby zdające maturę na poziomie rozszerzonym powinny „przerobić" zarówno zadania z poziomu podstawowego, jak i rozszerzonego, żeby jak najlepiej przygotować się do egzaminu.

2 ZADANIA DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

zobacz dowód 22

DOWÓD 56 R

Wykaż, że liczba $7^{30} - 8 \cdot 7^{20} + 15 \cdot 7^{10}$ jest podzielna przez 56.

zobacz dowód 152

DOWÓD 166 R

Wiedząc, że liczby x, y, z są kolejnymi niezerowymi wyrazami ciągu geometrycznego, uzasadnij, że $\frac{y^2z^2}{x} + \frac{x^2z^2}{y} + \frac{x^2y^2}{z} = x^3 + y^3 + z^3$.

zobacz dowód 181

DOWÓD 200 P

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność $10x^2 + 6xy + 2y^2 \geq 0$.

zobacz dowód 246

DOWÓD 274 P

Wykaż, że suma pól księżyców Hipokratesa zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego jest większa od pola tego trójkąta.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

W drugiej części każdego rozdziału znajdują się zada nia do samodzielnego wykonania.

Wszystkich zadań w tej części jest 163.

Przy każdym zadaniu określony jest również poziom trudności — podstawowy lub rozszerzony.

Zadania z tej części uczeń rozwiązuje samodzielnie. Może również skorzystać ze wskazówki, czyli odwołania do podobnego zadania z pierwszej części, którego sposób rozwiązania jest analogiczny.

3 ROZWIĄZANIA ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

W trzeciej części każdego rozdziału znajdują się przykładowe rozwiązania do zadań z drugiej części.

DOWÓD 56 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$7^{30}-8\cdot 7^{20}+15\cdot 7^{10}=7^{10}\left(7^{20}-8\cdot 7^{10}+15\right)$

Niech $t=7^{10}$ $\rightarrow$ $7^{20}-8\cdot 7^{10}+15=t^2-8t+15=(t-5)(t-3)=\left(7^{10}-5\right)\left(7^{10}-3\right)$, więc

$7^{30}-8\cdot 7^{20}+15\cdot 7^{10}=7^{10}\underbrace{\left(7^{10}-5\right)}_{2k}\underbrace{\left(7^{10}-3\right)}_{2k+2,\ k\in\mathbb{C}}=7^{10}\cdot 2k\cdot(2k+2)=7^{10}\cdot 2\cdot 2\cdot\underbrace{k(k+1)}_{2l,\ l\in\mathbb{C}}=7^{10}\cdot 8l=56\cdot 7^9 l$, więc liczba jest podzielna przez 56.

DOWÓD 166 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Kolejne wyrazy ciągu: $x,\ y=xq,\ z=xq^2$.

$$L=\frac{y^2z^2}{x}+\frac{x^2z^2}{y}+\frac{x^2y^2}{z}=\frac{x^{\cancel{2}}q^2\cdot x^2q^4}{\cancel{x}}+\frac{x^2\cdot x^{\cancel{2}}q^{\overset{3}{\cancel{4}}}}{\cancel{x}\cancel{q}}+\frac{x^2\cdot x^{\cancel{2}}\cancel{q^2}}{\cancel{x}\cancel{q^2}}=x^3q^6+x^3q^3+x^3=x^3+(xq)^3+\left(xq^2\right)^3=x^3+y^3+z^3=P$$

DOWÓD 200 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

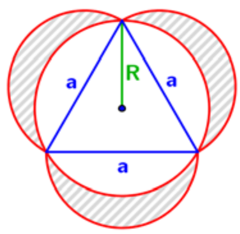
$$10x^2+6x+2y^2\geq 0$$

$$x^2+\underbrace{9x^2+6xy+y^2}+y^2\geq 0$$

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+\underbrace{(3x+y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}\geq 0$$

DOWÓD 274 PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$P_K=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\pi R^2=$



$=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\pi+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=$

$=\frac{3}{8}a^2\pi+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}a^2\pi=$

$=\frac{9}{24}a^2\pi-\frac{8}{24}a^2\pi+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=$

$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{24}a^2\pi>\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, czyli suma pól księżyców Hipokratesa jest większa od pola trójkąta.

W uznaniu za wyjątkowe podejście do matematyki i umiejętność zarażania pasją uczniów!

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych i innych materiałów udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną

Rekomendowany w przygotowaniach do konkursów i olimpiad

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-23-4

9 788363 975234

Cena 37,00 zł

Umiem to!

DOWODY MATEMATYCZNE

Zbiór zadań na dowodzenie dla maturzystów i nie tylko.

Zakres podstawowy i rozszerzony

Kilka słów o autorze...

Dariusz Kulma to nauczyciel z ponad 20-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in.:

- nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia w 2008 roku,
- jako jedyny matematyk trzykrotnie nagrodzony w ogólnopolskim konkursie Nauczyciel Roku (pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego") — w 2006 nagrodą „Nadzieja Edukacji", w 2007 roku jednym z trzech wyróżnień, a rok później tytułem Nauczyciela Roku 2008.
- Jest pomysłodawcą i twórcą projektu Matematyka Innego Wymiaru — zrzeszającego ponad 20 tysięcy uczniów chcących rozwijać swoje matematyczne zdolności.
- Jest autorem piętnastu zbiorów zadań, w tym dla najmłodszych uczniów z zadaniami z krainy Kwadratolandii.
- Prowadzi fanpage „Jak zdać maturę z matematyki?", pomagając w rozwiązywaniu zadań, udzielając porad i wskazówek przedmaturalnych.
- Jest autorem serii książek „Jak zdać maturę z matematyki?".
- Jest pomysłodawcą Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży oraz autorem zadań konkursowych.
- Jest autorem programu nauczania matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych opracowanego w ramach projektu E-laboratorium matematyczne.

Od autora...

„(...) Nie bój się dowodów matematycznych. Najtrudniej będzie zacząć. Ale pamiętaj — bez pierwszego kroku nie ma drugiego i kolejnych. Po rozwiązaniu kilku zadań na wykazywanie zauważysz, że można się tego nauczyć, a co więcej — można nawet to polubić. Wiem, że teraz mi nie wierzysz, ale zapewniam Cię: tak będzie.

Zadania zamieszczone w książce są przeznaczone przede wszystkim dla uczniów szkół średnich z obu poziomów. W arkuszu maturalnym z poziomu podstawowego, a tym bardziej rozszerzonego zawsze znajdziemy kilka dowodów matematycznych. Bardzo często są to dowody geometryczne lub zadania dotyczące wykazywania nierówności i dlatego tego typu zadań w tej książce znajdziesz najwięcej. Jeśli ktoś myśli o bardzo dobrych wynikach na maturze z matematyki, to niezależnie od poziomu — musi nauczyć się dowodzenia i wykazywania. Wiele dowodów może bez problemu przeprowadzić również uczeń gimnazjum. Materiał zawarty w książce może być znakomitym treningiem przygotowującym do konkursów i olimpiad matematycznych."

Dariusz Kulma

Zbiór zadań zawiera 324 dowody w pełni rozwiązane „krok po kroku", w tym:

- **131 zadań** z zakresu podstawowego
- **193 zadania** z zakresu rozszerzonego

Zbiór zadań został podzielony na 10 tematycznych rozdziałów — każda część zawiera:

- **zadania w pełni rozwiązane z komentarzem**
- **zadania do samodzielnego wykonania** (z odwołaniem do zadania pomocniczego)
- **pełne rozwiązania zadań do samodzielnego wykonania**