

Dariusz Kulma — Nauczyciel Roku 2008


101 ZADAŃ

DLA AMBITNYCH MATURZYSTÓW

Zbiór zadań trudnych, ciekawych
i nietypowych z matematyki
na **poziomie rozszerzonym**



Wskazówki do wszystkich zadań wraz
z pełnymi rozwiązaniami **“krok po kroku”**

 **Zadania multidziałowe**

MATURA
z matematyki
jest coraz
TRUDNIEJSZA

**PRZYGOTUJ SIĘ
DOBRCZE!**



DARIUSZ KULMA

101 ZADAŃ

DLA AMBITNYCH MATURZYSTÓW

Zbiór zadań trudnych, ciekawych i nietypowych
z matematyki na poziomie rozszerzonym



WYDAWNICTWO — ELITMAT
Mińsk Mazowiecki 2019

Autor: **Dariusz Kulma**
Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**
Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**
Projekt graficzny okładki: **Ewelina Trębacz**
Projekt graficzny i skład komputerowy: **Ewelina Trębacz**

Druk i oprawa: **Drukarnia "KOLUMB"**
ul. Kaliny 7
41-506 Chorzów

Zbiór zadań został opracowany zgodnie z obowiązującą podstawą programową dla szkół ponadgimnazjalnych, z wykorzystaniem arkuszy maturalnych udostępnianych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z www.stock.adobe.com: © Cookie Studio - 155055010;
© fotogestoeber - id. 103185232; © spaxiax - id. 117527046; © Netfalls
- id. 126084732; © BOOCYS - id. 102197794; © sakkmeisterke - id. 129073453;
© Miguel Aguirre - id. 123655030; © the_lightwriter - id. 180854229;
© S.Gvozd - id. 218820787;

Fotografie z www.pixabay.com: © FrankHofmann - 775630;
© Simon - 276995; © nguyentuanhung - 100961; © jwwein - 3825224

Copyright by Firma Edukacyjno - Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
Wydanie: Firma Edukacyjno - Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl
www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2019. Wydanie pierwsze.
ISBN: 978-83-63975-34-0

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy składać przez stronę.

www.jakzdacmaturezmatematyki.pl

bądź na adres: elitmat@elitmat.pl

Przeczytaj uważnie, jeśli chcesz jeszcze skuteczniej przygotować się do matury rozszerzonej

Pomysł napisania tej książki pojawił się w mojej głowie już dawno i odżywał co jakiś czas – zawsze po kolejnych maturach z poziomu rozszerzonego w ostatnich latach. Egzaminy maturalne na tym poziomie od kilku lat są z roku na rok coraz trudniejsze. Problemem nie jest w sumie sam zakres wiedzy, jaką powinien posiadać maturzysta zdający maturę na tym poziomie, ale to, że poruszane wątki zadań są często nietypowe. Poza tym dużą trudnością jest również to, by zdążyć rozwiązać te zadania w 180 minut, które przeznaczone są na ten egzamin. Wiele razy od moich uczniów po maturze słyszałem: „Zrobiłbym te zadania, ale jakbym miał ze dwie godziny więcej”, „Wiedziałam, jak rozwiązać, ale zabrakło mi czasu, żeby to zapisać”. Czy jest na to sposób?



Możemy długo dyskutować, czy formuła egzaminu jest odpowiednia. Dla mnie jednak najważniejsze jest to, by Twój wynik na maturze z matematyki z poziomu rozszerzonego, pomimo wszystko, był jak najlepszy. Napisałem tę książkę, byś wszedł na jeszcze wyższy poziom przygotowań i mam nadzieję, że uda Ci się to osiągnąć. Ta książka jest odpowiedzią na ten coraz trudniejszy egzamin.

Chciałbym zaznaczyć, że książka jest skorelowana z repetytorium „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym” oraz arkuszami maturalnymi, a także z książką bardzo ważną w maturalnych przygotowaniach, czyli zbiorem „Dowody matematyczne – zbiór zadań na dowodzenie dla maturzystów i nie tylko”. Możesz jednak uczyć się z tej książki niezależnie od pozostałych, ale pamiętaj o tym, że w tej książce będziemy omawiać i rozwiązywać zadania bardziej ambitne, nietypowe, ciekawe, wymagające, więc na pewno nie będzie tu wszystkich zagadnień, które są potrzebne, by zdać dobrze maturę.

Czym wyróżnia się ta książka, jaki ma system i co zawiera?

- Blisko 50% zadań w tej książce to **zadania multidziałowe**, czyli takie, które zawierają zagadnienia z wielu działów – nawet z czterech czy pięciu. Rozwiązując takie zadanie, powtarzasz "jakby przy okazji" materiał, który poznałeś wcześniej, a dzięki temu utrwalasz te zagadnienia i będziesz pamiętać je zdecydowanie dłużej. Rozwiązanie takich zadań spowoduje, że mniej czasu będziesz potrzebować na ciągłe utrwalanie wcześniejszych umiejętności.

● W wielu rozwiązaniach zadań wykorzystujemy **twierdzenia i wzory, których nie ma w podstawie programowej**, a dzięki którym można rozwiązać zadanie szybciej. Namawiam Cię do tego, byś starał się z nich korzystać. Wybrałem tylko te, dzięki którym oszczędzisz dużo czasu. To się naprawdę opłaca! W kontekście matury rozszerzonej odpowiednie gospodarowanie czasem to, jak wspomnieliśmy wcześniej, ważny element tego egzaminu. Moi uczniowie zawsze chętnie korzystają z takich twierdzeń i wzorów, jeśli widzą w tym oszczędność czasu. I nie bój się, na maturze jak najbardziej możesz z takich twierdzeń i wzorów korzystać.

● Do wszystkich zadań w danym dziale znajdziesz w oddzielnym podrozdziale **wskazówki do zadań**. Pewnie z własnych doświadczeń zauważyłeś, że gdy nie ma pomysłu na zadanie, to od razu zaglądamy do rozwiązania lub odpowiedzi. Taka metoda jest jednak trochę mało skuteczna, bo nie dałeś sobie czasu, by pomyśleć, zastanowić się i tak zwyczajnie pogłótkować nad tym zadaniem, a przecież to są dla Twojego matematycznego rozwoju chwile bezcenne. To wtedy uczysz się najwięcej i bardzo efektywnie. Zostawiam Ci więc najpierw wskazówkę. Podpowiadam, ale proszę, abyś dalej rozwiązał je samodzielnie.

● Do wszystkich zadań znajdziesz w oddzielnym podrozdziale (kolejnym po wskazówkach) **pełne rozwiązania krok po kroku** z pełnymi wyjaśnieniami opisanymi zrozumiałym językiem. Nawet, jeśli zrobiłeś zadanie inaczej, to proszę, żebyś zapoznał się i przejrzał te sposoby. Może któraś z tych metod uda Ci się wykorzystać przy innych zadaniach, a najlepiej na maturze!

Na koniec chciałbym Ci dedykować mój ulubiony cytat, który prowadzi mnie przez życie: **„W konfrontacji strumienia ze skałą, strumień zawsze wygrywa – nie przez swoją siłę, ale przez wytrwałość.”** To słowa Buddy, które pokazują, że jeśli chcesz osiągnąć sukces, to musisz iść krok po kroku drogą wytrwałości i pracowitości. I tego Ci serdecznie życzę!

2 zyczeniami samych sukcesów!
Danusz Dulma



powiązane
z działem 10

maj 2016

(SF)

warto poznać!

Zadania "multidziałowe", czyli w jednym zadaniu powtarzamy zagadnienia z różnych działów. Podane numery informują, z którym działem lub działami powiązane jest dane zadanie.

Zadanie pochodzące z danej matury CKE.

Zadanie pochodzące z matury CKE według formuły sprzed 2015 roku.

Informacje, które mogą pomóc Ci w szybszym rozwiązaniu zadania.

Dodatkowe informacje, komentarze oraz errata
dostępne na stronie: jakzdacmaturezmatematyki.pl/errata

SPIS TREŚCI

1.

LICZBY RZECZYWISTE	7
Zadania	7
Wskazówki	9
Rozwiązania	11

2.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE	17
Zadania	17
Wskazówki	19
Rozwiązania	21

3.

FUNKCJE	31
Zadania	31
Wskazówki	33
Rozwiązania	35

4.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI	45
Zadania	45
Wskazówki	47
Rozwiązania	49

5.

CIĄGI	61
Zadania	61
Wskazówki	64
Rozwiązania	66

6.

TRYGONOMETRIA	75
Zadania	75
Wskazówki	77
Rozwiązania	79

7.

PLANIMETRIA	89
Zadania	89
Wskazówki	94
Rozwiązania	97

8.

GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA	121
Zadania	121
Wskazówki	123
Rozwiązania	125

9.

STEREOMETRIA	139
Zadania	139
Wskazówki	142
Rozwiązania	144

10.

STATYSTYKA, KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO	157
Zadania	157
Wskazówki	160
Rozwiązania	162

11.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY	173
Zadania	173
Wskazówki	176
Rozwiązania	178

DZIAŁ 1

ZADANIA



**LICZBY
RZECZYWISTE**

ZADANIE 1

4 pkt

Wykaż, że dla $n \geq 1$ suma liczb $\underbrace{33\dots3}_n^2 + \underbrace{22\dots2}_n = \underbrace{11\dots1}_{2n}$.



powiązane z działem 2

ZADANIE 2

czerwiec 2018 (SF)

3 pkt

Dodatknie liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$, spełniają warunek

$\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. Wykaż, że dla liczb a i b prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 = 11ab$.



powiązane z działem 2

ZADANIE 3

3 pkt

Wykaż, że dla $a > 0$ i $a \neq 1$, $b > 0$ i $b \neq 1$ oraz $n \neq 0$ zachodzi równość

$$\log_{a^n} a^{\frac{1}{\log_a b}} = \frac{1}{n} \log_a b$$



powiązane z działem 2

ZADANIE 4

4 pkt

Blisko 50% zadań w tej książce

to **zadania multidziałowe**, czyli takie, które

zawierają zagadnienia z różnych działów —

nawet z czterech czy pięciu. Rozwiązując

takie zadanie, powtarzasz "jakby przy okazji"

materiał, który poznałeś wcześniej.



powiązane z działem 2

3 pkt



powiązane z działem 2

3 pkt

Sprawdź, czy liczba $3^{2019} + 2019^3$ jest liczbą pierwszą czy złożoną.



powiązane z działem 10

ZADANIE 7

4 pkt

Dana jest liczba $1! + 2! + 3! + \dots + 2018! + 2019!$. Znajdź trzy ostatnie cyfry tej liczby.



powiązane z działem 2,5,6

ZADANIE 8

5 pkt

Wykaż, że liczba $k = a^{\log_7 5} \cdot b^{\log_2 5} \cdot c^{\log_3 5}$ jest sześcianem liczby naturalnej, jeśli

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots}{n}, b = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} + 2^{0,5}, c = 5^{\sin^2 100^\circ + \sin^2 100^\circ \cos^2 100^\circ + \cos^4 100^\circ}$$

DZIAŁ 1

WSKAZÓWKI



**LICZBY
RZECZYWISTE**

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 1

Zamień występujące w działaniu liczby na iloczyn liczb całkowitych i liczb złożonych z samych jedynek, a następnie wyłącz liczbę $11 \dots 1$ przed nawias.

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 2

Wykorzystaj własność $\frac{1}{2} \log_a x = \log_a \sqrt{x}$ i doprowadź równanie do postaci $\log_a x = \log_a z$, aby móc opuścić logarytmy.

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 3

Przeprowadź dowód od lewej strony równania do prawej. Możesz skorzystać m.in. ze wzorów: $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ oraz $a^{\log_a b} = b$.

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 4

Zamień podane sumy na iloczyny o czynnikach, które są czynnikami liczby 9610. Możesz skorzystać z metody grupowania wyrazów.

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 5

Do wszystkich zadań w danym dziale znajdziesz w oddzielnym podrozdziale **wskazówki do zadań**.

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 7

Rozważ, od której liczby postaci $n!$ trzy ostatnie cyfry tej liczby się nie zmieniają i nie mają wpływu na ostatnie cyfry podanej sumy.

WSKAZÓWKA DO ZADANIA 8

Wyznacz liczby a, b, c , a następnie skorzystaj ze wzorów $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ oraz $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Przy wyznaczaniu liczby a zauważ, że licznik granicy jest szeregiem geometrycznym. Przy wyznaczaniu liczby b skorzystaj z zależności $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$. Przy wyznaczaniu liczby c skorzystaj ze wzoru na jedynkę trygonometryczną.

DZIAŁ 1

ROZWIĄZANIA



**LICZBY
RZECZYWISTE**

Do wszystkich zadań znajdziesz w oddzielnym podrozdziale (kolejnym po wskazówkach) **pełne rozwiązania krok po kroku** z pełnymi wyjaśnieniami opisanymi zrozumiałym językiem.

ZADANIE 7**4 pkt**

Dana jest liczba $1! + 2! + 3! + \dots + 2018! + 2019!$. Znajdź trzy ostatnie cyfry tej liczby.



powiązane
z działem **10**

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Wykonujemy tabelę z kolejnymi silniami liczb naturalnych oraz liczbami, które utworzone są przez trzy ostatnie cyfry sumy tych liczb.

Liczba $n!$	Trzy ostatnie cyfry $n!$	Trzy ostatnie cyfry sumy liczb	UWAGA!
1!	1	1	Przy dużych wynikach, które nie mieszczą się na kalkulatorze, wystarczy mnożyć trzy ostatnie cyfry poprzedniej silni przez kolejną liczbę, np. ostatnie trzy cyfry liczby $9!$ to 880, więc liczbę 880 mnożymy przez 10 i trzy ostatnie cyfry tego iloczynu są trzema ostatnimi cyframi liczby $10!$. Można zauważyć, że od liczby $15!$ cały czas trzema ostatnimi cyframi są liczby 0, więc wszystkie kolejne składniki sumy nie zmieniają trzech ostatnich cyfr, które będą takie same jak w sumie: $1! + 2! + 3! + \dots + 14!$
2!	2	3	
3!	6	9	
4!	24	33	
5!	120	153	
6!	720	873	
7!	040	913	
8!	320	233	
9!	880	113	
10!	800	913	
11!	800	713	
12!	600	313	
13!	800	113	
14!	200	313	
15!	000	313	
16!	000	313 itd.	

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: Trzy ostatnie cyfry to 3,1,3.



powiązane
z działem 2, 5, 6

ZADANIE 8

5 pkt

Wykaż, że liczba $k = a^{\log_7 5} \cdot b^{\log_2 5} \cdot c^{\log_7 3,5}$ jest sześcianem liczby naturalnej, jeśli

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots}{n}, \quad b = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} + 2^{0,5}, \quad c = 5^{\sin^2 100^\circ + \sin^2 100^\circ \cos^2 100^\circ + \cos^4 100^\circ}$$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Wyznamy liczbę a . Suma $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots$ jest szeregiem geometrycznym, gdzie

$$a_1 = n, \quad a \quad q = \frac{1}{2}, \quad \text{więc } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n}{\frac{1}{2}} = 2n$$

Obliczamy granicę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2, \quad \text{więc } a = 2$$

Wyznamy liczbę b . Zamieniamy różnicę $18 - 8\sqrt{2}$ na kwadrat różnicy i korzystamy

$$\text{z zależności: } \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$$

$$b = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} + 2^{0,5} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} + 2^{\frac{1}{2}} = |4 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4$$

Wyznamy liczbę c , korzystając ze wzoru na jedynekę trygonometryczną.

$$c = 5^{\sin^2 100^\circ + \cos^2 100^\circ \underbrace{(\sin^2 100^\circ + \cos^2 100^\circ)}_1} = 5^{\underbrace{\sin^2 100^\circ + \cos^2 100^\circ}_1} = 5$$

Podstawiamy wyznaczone wartości do liczby k .

$$k = 2^{\log_7 5} \cdot 4^{\log_2 5} \cdot 5^{\log_7 3,5} =$$

$$\text{Korzystamy ze wzoru: } a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$= 2^{\log_7 5} \cdot 5^{\log_2 4} \cdot 3,5^{\log_7 5} = 2^{\log_7 5} \cdot 5^2 \cdot 3,5^{\log_7 5} =$$

$$\text{Korzystamy ze wzoru: } a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$= (2 \cdot 3,5)^{\log_7 5} \cdot 5^2 = 7^{\log_7 5} \cdot 5^2$$

$$\text{Korzystamy ze wzoru: } a^{\log_a b} = b$$

$$= 5 \cdot 5^2 = 5^3$$

Liczba k jest sześcianem liczby 5.

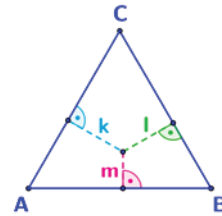
PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Niech:

 a – długość boku trójkąta h_{Δ} – wysokość trójkąta

TWIERDZENIE VIVIANIEGO

Dla każdego punktu leżącego we wnętrzu trójkąta równobocznego suma jego odległości od poszczególnych boków trójkąta jest stała i wynosi tyle, co wysokość trójkąta.



Suma $k + l + m$ jest równa wysokości trójkąta.

W wielu rozwiązaniach zadań wykorzystujemy **twierdzenia i wzory, których nie ma w podstawie programowej**, a dzięki którym można rozwiązać zadanie szybciej.

$$a = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

Obliczamy pole działki ze wzoru: $P_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

$$P_{\Delta} = \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16}{64} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ m}^2$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: Powierzchnia działki wynosi $48\sqrt{3} \text{ m}^2$.

$3,7 = 12$

obocznego: $h_{\Delta} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

WARTO POZNAĆ!

DLA MATURZYSTÓW POLECAMY SERIĘ KSIĄŻEK „JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI” AUTORSTWA DARIUSZA KULMY – NAUCZYCIELA ROKU 2008



Seria „Jak zdać maturę z matematyki” to m.in. REPETYTORIA:

- ✓ Wszystkie najważniejsze zagadnienia – wzory, definicje, twierdzenia z przykładami opracowane według aktualnej podstawy programowej.
- ✓ Łącznie 1387 ZADAŃ – 677 zadań na poziomie podstawowym oraz 710 zadań na poziomie rozszerzonym (w tym zadania na dowodzenie i wykazywanie).
- ✓ Rozwiązania „krok po kroku”, wskazówki i komentarze – które wytłumaczą Ci każde zadanie jak najlepszy korepetytor.
- ✓ Podsumowania – które systematycznie porządkują Twoją wiedzę, również w wersji on-line.



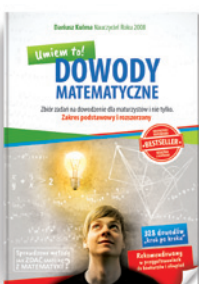
Z książkami z serii „Jak zdać maturę z matematyki” ściśle powiązane są ARKUSZE NATURALNE

- ✓ Na poziomie podstawowym i rozszerzonym.
- ✓ Zawierają zadania autorskie opracowane na podstawie wytycznych CKE.
- ✓ Rozwiązania do zadań z dowodami i na wykazywanie.
- ✓ Łącznie 502 ZADANIA.
- ✓ Odpowiedzi do wszystkich zadań.



„DOWODY MATEMATYCZNE — UMIEM TO! Zbiór zadań na dowodzenie dla maturzystów i nie tylko”.

- ✓ 328 DOWODÓW – na poziomie podstawowym i rozszerzonym.
- ✓ Rozwiązania „krok po kroku” do wszystkich zadań.
- ✓ Rekomendowana w przygotowaniach do konkursów i olimpiad matematycznych.
- ✓ Każde zadanie oznaczone poziomem trudności.
- ✓ Wskazówki do zadań do samodzielnego wykonania.



Więcej informacji na: jakzdamaturezmatematyki.pl/ksiazka

101 ZADAŃ

DLA AMBITNYCH MATURZYSTÓW

Zbiór zadań trudnych, ciekawych i nietypowych z matematyki na poziomie rozszerzonym

Dariusz Kulma to nauczyciel z ponad 20-letnim stażem, wielokrotnie wyróżniany za swoje osiągnięcia, w tym m.in. nagrodą Ministra Edukacji Narodowej II stopnia oraz tytułem Nauczyciela Roku 2008 w ogólnopolskim konkursie organizowanym pod patronatem Ministerstwa Edukacji Narodowej i „Głosu Nauczycielskiego”.



Jest autorem serii książek dla maturzystów oraz kilkunastu zbiorów z zadaniami konkursowymi. Jest twórcą wielu projektów edukacyjnych, w tym m.in. „Matematyki Innego Wymiaru”, „Matematycznych Mistrzostw Polski Dzieci i Młodzieży” czy „E-laboratorium matematyczne”. W ramach projektu „Jak zdać maturę z matematyki?” prowadzi warsztaty motywacyjne dla maturzystów, wspierając młodzież w przygotowaniach maturalnych. Jest również szkoleniowcem i wykładawcą podczas wielu konferencji dla nauczycieli matematyki w Polsce.

Czym wyróżnia się ta książka?

- Blisko 50% zadań w tej książce to **ZADANIA MULTIDZIAŁOWE**, czyli takie, które zawierają zagadnienia z wielu działów – nawet z czterech czy pięciu. Rozwiązując takie zadanie, powtarzasz materiał "jakby przy okazji"!
- W wielu rozwiązaniach wykorzystujemy **TWIERDZENIA I WZORY, KTÓRYCH NIE MA W PODSTAWIE PROGRAMOWEJ**, a dzięki którym można rozwiązać zadanie szybciej!
- Do wszystkich zadań w danym dziale znajdziesz **WSKAZÓWKI DO ZADAŃ**.
- Do wszystkich zadań znajdziesz **PEŁNE ROZWIĄZANIA KROK PO KROKU** z wyjaśnieniami opisanymi zrozumiałym językiem.



Bestsellerowa seria książek: "Jak zdać maturę z matematyki?"



ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

ISBN 978-83-63975-34-0



9 788363 975340

Cena 37,00 zł

Sprawdź inne książki oraz materiały on-line

Zamówienia e-mail: elitmat@elitmat.pl

Zamówienia telefoniczne: 51-7777-51

Zamówienia on-line: www.jakzdamaturęzmatematyki.pl