Ponad 11 000 sprzedanych egzemplarzy książek z serii „Jak zdać maturę z matematyki"

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI?

NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni

nie tylko dla humanistów!

PAKIET ON-LINE

557 zadań

matura nowa podstawa programowa

2015 2016 2017 2018

Dariusz Kulma

Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz odpowiedź

DARIUSZ KULMA

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE PODSTAWOWYM?

Najprostsza droga do osiągnięcia sukcesu w 10 dni

nie tylko dla humanistów!

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2015

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

W książce wykorzystano zadania udostępnione przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z www.fotolia.com: © Syda Productions - id. 75958538; © ag visuell - id. 53584856; © Dreaming Andy - id. 62704436; © valdis torms - id. 46177828; © Marek - id. 68124775; © valdis torms - id. 66702797; © Denis Junker - id. 54171604; © Andrey_Arkusha - id. 74798374; © dengess - id. 42780077; © Lovrencg - id. 51595955; © kharlamova_lv - id. 47907680

Fotografie z www.pixabay.com: PublicDomainPictures - id. animal-1717_640; stux - id. origami-210114_1280; blickpixel - id. cube-570703_1920

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl , www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie trzecie.

ISBN: 978-83-63975-14-2

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy składać przez stronę:

www.jakzdacmaturezmatematyki.pl

bądź na adres: elitmat@elitmat.pl

WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać!

Ponieważ: po pierwsze, poznamy się, a po drugie — wyjaśnię Ci, co, dlaczego, jak i kiedy zrobić, by zdać maturę z matematyki.

Drogi Maturzysto!

Obowiązkowa matura z matematyki dla niektórych jest czymś prostym i banalnym, dla innych jest jedną z wielkich życiowych traum. Tych drugich jest jednak zdecydowanie więcej.

W 2014 roku egzaminu dojrzałości z matematyki nie zdało 25% maturzystów! To bardzo dużo. Dlaczego aż tyle?

Wynika to z wielu nawarstwionych problemów. Uczeń, który nie lubi matematyki i ma problemy z nauczeniem się jej, inaczej postrzega matematyczną rzeczywistość. Dodatkowo paraliżuje go strach i lęk przed tym przedmiotem, ponieważ ma wiele negatywnych wspomnień związanych z jego dotychczasową nauką. Nie wiem, jakim jesteś uczniem, ale skoro czytasz tę książkę, to również masz jakieś obawy związane z tym egzaminem. Może chcesz tylko zdać, a może zależy Ci na jak najwyższym wyniku. Z każdej z tych sytuacji wyjdziesz zwycięsko, jeśli zastosujesz moją metodę przygotowań!

Książka „Jak zdać maturę z matematyki" jest kołem ratunkowym przede wszystkim dla osób, które mówią o sobie, że są humanistami, ale nie tylko dla nich. Przez 20 lat jako nauczyciel matematyki zebrałem mnóstwo doświadczeń i spostrzeżeń dotyczących uczniów z trudnościami w uczeniu tego przedmiotu. Przygotowałem blisko 10 tysięcy uczniów do różnych egzaminów i na różnym poziomie. Wypracowałem swój własny warsztat pracy, który udoskonalam z roku na rok z coraz lepszymi efektami.

Czym ta książka różni się od innych?

Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym?" to specjalny system przygotowań oparty na kilku filarach.

Pierwszy to „łopatologiczne" tłumaczenie zagadnień matematycznych. Wielu matematyków mogą razić uproszczenia w moich wyjaśnieniach. Jednak dla Ciebie i dla mnie liczy się efekt — masz zdać maturę! Na pewno masz już dość niezrozumiałych sformułowań, z którymi wielokrotnie spotykałeś się na co dzień w szkole. W tej książce nie znajdziesz encyklopedycznych formułek. Wyjaśnienia mają być proste i konkretne. Dlatego gdy przypominam Ci wzór w części teoretycznej, to od razu możesz go ponownie zobaczyć.

Drugi filar to specjalny rozkład zadań — zasada trzech kroków. Pierwszy krok — zadanie do analizy, w trakcie której poznajesz najprostszy sposób rozwiązania zadania określonego typu. Drugi krok to rozwiązywanie zadania podobnego do analizowanego, ale w oparciu o wskazówki. Nawet jeśli jesteś pozbawiony matematycznej pewności, zobaczysz, że z podpowiedziami powoli zaczniesz wierzyć, że możesz się nauczyć rozwiązywać poszczególne zadania. Krok trzeci to zadanie sprawdzające — przy jego rozwiązywaniu nie otrzymujesz już pomocy, lecz tylko odpowiedź. Musisz w końcu być samodzielny! Szybko zobaczysz, że ten system się sprawdza. Takich zadań z zasadą trzech kroków jest w tej książce 357. Jest ich dużo, ale z reguły są dość krótkie i proste.

Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych. Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghausa i Tony'ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6 – 7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawią się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.** Podsumowania składają się z dwudziestu zadań, wśród których znajdziesz zadania testowe oraz zadania otwarte krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi. Łącznie jest to 200 zadań maturalnych, które sprawią, że będziesz miał coraz trwalej opanowane poznane umiejętności. Co ważne, w podsumowaniach tych znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów; na przykład w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowaniu nr 5 — z poprzednich pięciu. **Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury!** Przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz wskazówki. Najczęściej będzie to nu-

mer zadania podobnego, a czasem tylko informacja, gdzie szukać wskazówki. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań, a nawet rozwiązania krok po kroku, gdy zadanie jest dowodem lub innym zadaniem na wykazywanie. W innych książkach, gdy spotykamy dowody, najczęściej nie ma odpowiedzi ani żadnego rozwiązania. W tej książce jest inaczej.

Czy ten system działa?

W roku 2013 moi uczniowie osiągnęli z matury z matematyki średni wynik **91,45%**, który przy średniej ogólnopolskiej — w okolicach 50% — jest, musisz przyznać, dużo lepszy. W ostatnim roku przy trudniejszym arkuszu wynik był tylko o kilka punktów procentowych niższy, a **100% moich uczniów zdało egzamin maturalny**. Jak widzisz, ten system działa i Ty też możesz dołączyć do grupy szczęśliwców.

W książce znajdziesz większość najważniejszych typów zadań, jakie mogą znaleźć się na maturze. Trudno mówić o zadaniach „pewniakach", jak na poprzednich maturach, ponieważ od roku 2015 matura przygotowywana jest według nowej podstawy programowej. Jest jednak pewien kanon umiejętności, które mimo zmian podstawy programowej nadal będą pojawiały się w zadaniach maturalnych. Ta książka pomoże Ci opanować właśnie te najważniejsze umiejętności, byś mógł je skutecznie wykorzystać na maturze. Ten kanon umiejętności potwierdzają zamieszczone w książce wybrane zadania maturalne z konkretnych lat czy zadania zaproponowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną (CKE). Tym zadaniom przyglądaj się szczególnie. Nowe wydanie książki zostało poszerzone również o proste zadania na wykazywanie i dowodzenie. Takie zadania w arkuszu maturalnym są najczęściej dwa. Tych zadań też możesz się nauczyć.

Jakie rodzaje zadań będą na maturze podstawowej?

Arkusz maturalny będzie składał się z:

- 20 – 30 zadań zamkniętych, punktowanych w skali 0 – 1, w których jedną poprawną odpowiedź wybieramy z czterech podanych;
- 5 – 10 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi, punktowanych w skali 0 – 2,
- 3 – 5 zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi, punktowanych w skali 0 – 4, 0 – 5, 0 – 6.

Łącznie na 180-minutowym egzaminie możesz zdobyć 50 punktów.

Złota zasada pewności zdania egzaminu maturalnego z matematyki

Jeśli masz już tę książkę, to wykonałeś pierwszy duży krok. Kolejne kroki nie muszą być duże, ale jest ważne, by były systematyczne. Gdy rozwiążesz zadania zamieszczone w tej książce, bez żadnych problemów zdasz maturę! Ale musisz być konsekwentny. Dla osób mniej systematycznych przygotowałem dwa harmonogramy, które pomogą im w rozplanowaniu pracy. Czas przygotowań rozłożyłem na 10 oraz 42 dni. Oczywiście możesz też przygotowywać się jeszcze wolniej i spokojniej, na przykład przez cały rok szkolny. Tak byłoby nawet najlepiej. Wszystko zależy od tego, ile czasu zostało Ci do matury.

Proszę Cię jeszcze o jedno — nie omijaj żadnych zagadnień, które będą obowiązywały na Twojej maturze. Książka jest całością. Zależności poznawane we wcześniejszych rozdziałach są potrzebne w dalszej części — są niezbędne! Gdy to zrealizujesz, Twój wynik będzie naprawdę dobry. Sam będziesz zaskoczony swoim sukcesem.

Powodzenia!

Harmonogram przygotowań do matury w:

1 LICZBY RZECZYWISTE	str.	10 dni ↓	42 dni ↓
Wstęp teoretyczny — Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych	11	1	1
Wstęp teoretyczny — Liczby przeciwne i odwrotne do danej	11	1	1
Wstęp teoretyczny — Liczby pierwsze i złożone	12	1	1
Wstęp teoretyczny	12	1	1
Zadania — oblicze	14	1	1
Wstęp teoretyczny	24	1	2
Zadania — potęgi	25	1	2
Zadania — wyłącz	30	1	2
Wstęp teoretyczny	30	1	2
Zadania — notacj	30	1	2
Wstęp teoretyczny	31	1	2
Zadania — ułamki okresowe	32	1	2
Wstęp teoretyczny — Logarytmy	34	1	3
Zadania — obliczanie logarytmów z definicji	34	1	3
Zadania — wykorzystanie wzorów dotyczących logarytmów	37	1	3
Wstęp teoretyczny — Błąd bezwzględny i względny	40	1	4
Zadania — błąd bezwzględny	41	1	4
Zadania — błąd względny	42	1	4
Podsumowanie 1	45	1	5
2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE			
Wstęp teoretyczny — Podstawowe wiadomości o wyrażeniach algebraicznych	47	2	6
Wstęp teoretyczny — Wzory skróconego mnożenia	47	2	6
Zadania — zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	48	2	6
Zadania — usuwanie niewymierności z mianownika	53	2	6
Zadania — działania na wielomianach	55	2	7
Zadania — wyłączanie czynnika przed nawias	60	2	7
Zadania — działania na wyrażeniach wymiernych	60	2	7
Wstęp teoretyczny — Podzielność liczb	64	2	8
Wstęp teoretyczny — Wykazywanie podzielności	65	2	8
Zadania — dowody dotyczące podzielności liczb	65	2	8
Zadania — wykazywanie spełniania przez liczbę lub wyrażenie określonych warunków	68	2	8
Wstęp teoretyczny — Wykazywanie nierówności	73	2	9
Zadania — wykazywanie nierówności	73	2	9
Podsumowanie 2	77	2	10

numer dnia

OPTYMALNY PLAN POWTÓREK

*Przygotowanie planu pracy to podstawa powtórek maturalnych, dlatego **zrobiliśmy to już za Ciebie.***

*W zależności od tego, jakim czasem dysponujesz, możesz wybrać wariant **10-dniowy lub 42-dniowy.***

Przerabiając książkę zgodnie z harmonogramem, zdążysz z powtórzeniem wszystkich potrzebnych zagadnień, bo wiesz dokładnie, ile zajmie Ci to czasu.

INSTRUKCJA OBSŁUGI KSIĄŻKI

Drogi Maturzysto, przeczytałeś już wstęp?
Nie? To zapraszamy do przeczytania, dowiesz się z niego wiele o tej książce, co ułatwi zrozumienie instrukcji.
Tak? Poniżej znajdują się objaśnienia poszczególnych oznaczeń, z którymi spotkasz się podczas rozwiązywania zadań.

Zadania ← Oznaczenie zadań określonego typu lub dotyczących jednego zagadnienia.

zadanie do analizy ← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzami objaśniającymi poszczególne etapy rozwiązania.

zadanie ze wskazówkami ← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania w oparciu o podane wskazówki.

zadanie sprawdzające ← Zadania podobne do zadań do analizy i ze wskazówkami, do samodzielnego rozwiązania.

CKE ← Propozycje zadań Centralnej Komisji Egzaminacyjnej do matury według nowej podstawy programowej.

maj 2014 ← Zadania z matur z lat ubiegłych.

Odpowiedzi ← Odpowiedzi do zadań ze wskazówkami i sprawdzających, znajdujące się na kolejnych stronach.

warto wiedzieć... ← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań.

Cena brutto = 100% ← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania, znajdujące się na zielonym tle przy rozwiązaniu.

Jak zdać... 01 ← Porady ułatwiające organizację nauki oraz sam proces uczenia się.

Podsumowanie ← Podsumowujące zadania testowe oraz zadania otwarte obejmujące zagadnienia z działu, po którym się znajdują oraz działów poprzednich. Np. Podsumowanie 6 zawiera zadania z trygonometrii oraz zagadnienia z poprzednich pięciu działów. Każde podsumowanie ma swój indywidualny kod QR przekierowujący

UNIKALNY KOD DOSTĘPU

*W każdej książce znajduje się **unikalny kod uprawniający do skorzystania z pakietu on-line.***

*Wystarczy, że wpiszesz go na stronie i możesz **skorzystać ze specjalnego modułu podsumowań, który sprawdzi Twoje odpowiedzi i obliczy liczbę zdobytych punktów.***

tęp do PAKIETU ON-LINE w STREFIE MATURZYSTY.
adres www) i korzystaj z dodatkowych pomocy on-line.

i.pl/strefa_maturzysty

KOD DOSTĘPU

ZADANIE 81	zadanie sprawdzające	2 pkt	maj 2013

Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podziel

ROZWIĄZANIE

DOWODY I ZADANIA NA WYKAZYWANIE

*W książce znajdziesz **wiele dowodów i zadań na wykazywanie**. Jest to ten typ zadań, który sprawia uczniom z reguły **najwięcej trudności**.*

Ucząc się jednak zgodnie ze wskazówkami, będziesz w stanie opanować rozwiązywanie nawet takich zadań, które zawsze wydawały Ci się zbyt trudne.

*Wszystkie zadania są dokładnie wytłumaczone, a dzięki kolejnym, podobnym zadaniom, które robisz samodzielnie, **utrwalasz sobie sposób rozwiązywania.***

ZADANIE 82	zadanie do analizy	2 pkt	

Wykaż, że suma $2014 + 2014^2 + 2014^3 + 2014^4 + 2014^5 + 2014^6$ jest podzielna przez 2015.

ROZWIĄZANIE

1° Z każdej pary dwóch kolejnych liczb wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$2014 + 2014^2 + 2014^3 + 2014^4 + 2014^5 + 2014^6 =$$
$$= 2014(1 + 2014) + 2014^3(1 + 2014) + 2014^5(1 + 2014) =$$

2° Wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 2014)$ przed nawias.

$$= (1 + 2014)(2014 + 2014^3 + 2014^5) =$$

3° Wykonujemy działanie w pierwszym nawiasie.

$$= 2015(2014 + 2014^3 + 2014^5) =$$

4° Wyrażenie $(2014 + 2014^3 + 2014^5)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$$= 2015\underbrace{(2014 + 2014^3 + 2014^5)}_{k \in \mathbb{C}} = 2015k$$

5° Wyrażenie przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 2015 i liczby całkowitej, więc jest ono podzielne przez 2015.

ZADANIE 83	zadanie ze wskazówkami	2 pkt	

Wykaż, że suma $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8 + 5^9$ jest podzielna przez 31.

ROZWIĄZANIE

1° Z każdych trzech kolejnych liczb wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2° Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

3° Wykonujemy działanie w pierwszym nawiasie.

4° Zastępujemy wyrażenie, które jest liczbą całkowitą, literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

5° Sumę liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 31 i liczby całkowitej, więc jest ona podzielna przez 31.

3 Funkcje

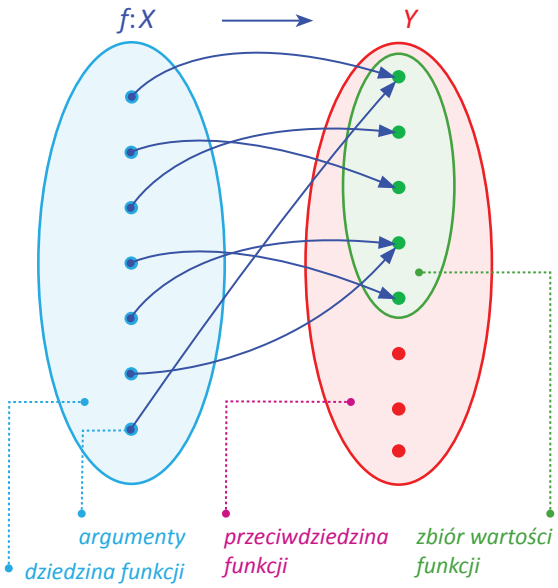
NIEZBĘDNA TEORIA PRZEJRZYŚCIE WYJAŚNIONA

*Na początku każdego działu znajdziesz **niezbędną teorię, czyli najważniejsze wzory, twierdzenia i definicje.***

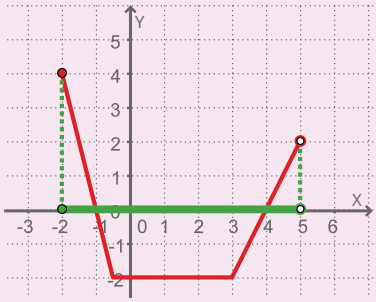
*Cała teoria oparta jest na konkretnych przykładach, pogrupowana, usystematyzowana i **ułożona tak, by jak najłatwiej było Ci ją zrozumieć i zapamiętać.***

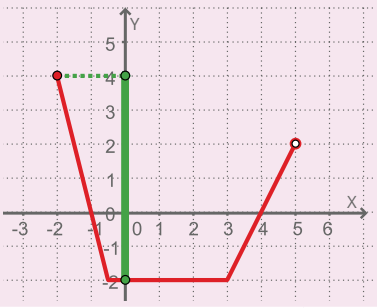
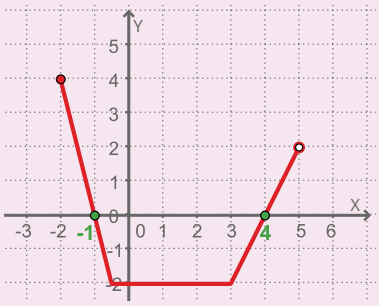
Podstawowe wiadomości o funkcjach

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
FUNKCJA	Funkcja ze zbioru X w zbiór Y to przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X (dziedziny) dokładnie jednego elementu zbioru Y (przeciwdziedziny funkcji).	
ARGUMENT FUNKCJI	Elementy dziedziny nazywamy argumentami.	
WARTOŚĆ FUNKCJI	Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy wartościami funkcji. Tworzą one zbiór wartości funkcji.	
	Aby określić funkcję, należy podać zbiór X i Y oraz regułę, według której argumentom ze zbioru X przyporządkowujemy wartości funkcji.	
	Funkcje zazwyczaj oznaczamy małymi literami, np.: f, g, h.	



Ogólne własności funkcji

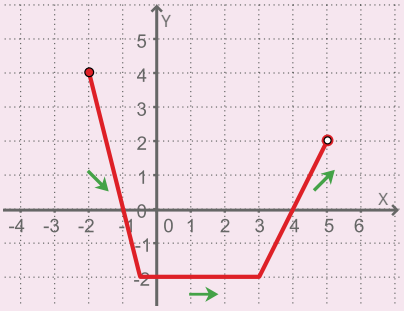
	ZAPIS SYMBOLICZNY FUNKCJI:	DZIEDZINA FUNKCJI TO:
OPIS	$y = f(x)$	zbiór X
PRZYKŁAD	$y = 2x + 3$ lub $f(x) = 2x + 3$	 $x \in \langle -2; 5)$

	ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI TO:	MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI TO:
OPIS	zbiór Y	x_0 to współrzędna x punktu, w którym wykres przecina oś OX.
PRZYKŁAD	 $y \in \langle -2; 4 \rangle$	 $x_0 = -1$ i $x_0 = 4$

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI:

DEFINICJA	W pewnym przedziale zawartym w dziedzinie funkcja jest:	rosnąca	gdy wraz ze wzrostem argumentów $(x_1 < x_2)$	rosną wartości $(f(x_1) < f(x_2))$.
		malejąca		maleją wartości $(f(x_1) > f(x_2))$.
		stała		wartości są stałe $(f(x_1) = f(x_2))$.

PRZYKŁAD



funkcja malejąca

$f(x) \searrow \iff x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2} \right\rangle$

funkcja stała

$f(x) \rightarrow \iff x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 3 \right\rangle$

funkcja rosnąca

$f(x) \nearrow \iff x \in \langle 3; 5)$

RODZAJE FUNKCJI:

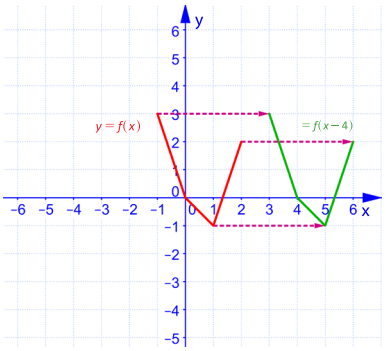
np. funkcja liniowa, kwadratowa, wielomianowa, wymierna, trygonometryczna, logarytmiczna, wykładnicza, potęgowa.

Przekształcenia równoległe wykresu funkcji

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OX: $y = f(x+p)$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OX.

PRZYKŁAD 1

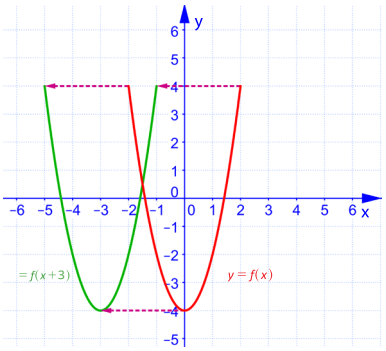


Wykres został przesunięty o 4 jednostki w prawo.

$p = -4$

Jeśli $p < 0$, to przesuwamy w prawo.

PRZYKŁAD 2



Wykres został przesunięty o 3 jednostki w lewo.

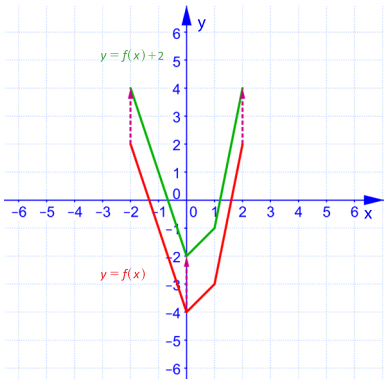
$p = 3$

Jeśli $p > 0$, to przesuwamy w lewo.

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OY: $y = f(x) + q$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OY.

PRZYKŁAD 3

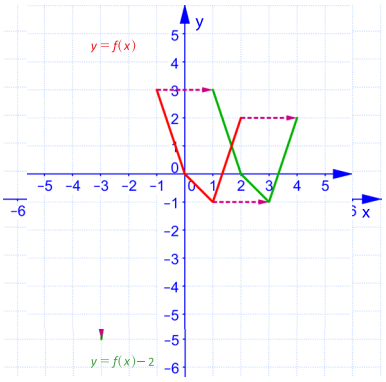


Wykres został przesunięty o 2 jednostki w górę.

$q = 2$

Jeśli $q > 0$, to przesuwamy w górę.

PRZYKŁAD 4



Wykres został przesunięty o 2 jednostki w dół.

$q = -2$

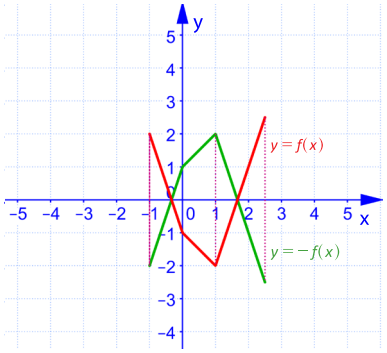
Jeśli $q < 0$, to przesuwamy w dół.

Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych

PRZYKŁAD

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI : $y = -f(x)$

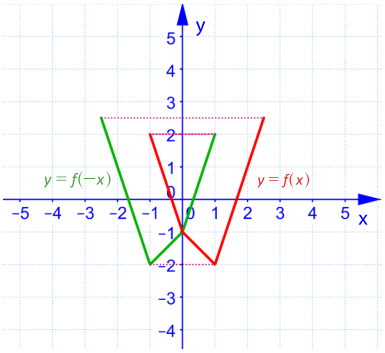
Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OX.



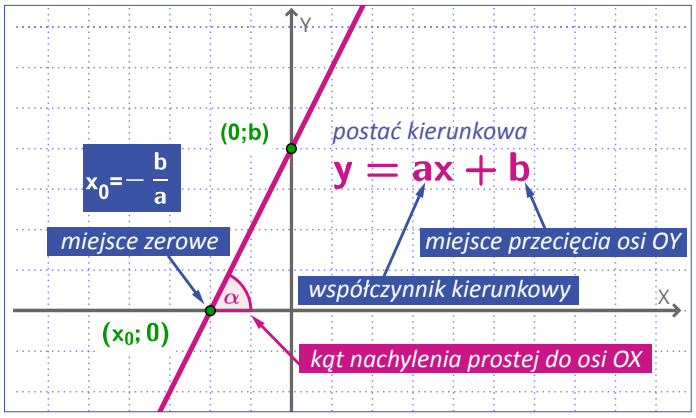
PRZYKŁAD

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI : $y = f(-x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OY.



Wykres i własności funkcji liniowej



NAJWAŻNIEJSZE POSTACI FUNKCJI LINIOWEJ	postać **kierunkowa**	$y = ax + b$
	postać **ogólna**	$Ax + By + C = 0$, współczynniki A i B nie są jednocześnie zerami
WŁASNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA KIERUNKOWEGO a	$a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie kąt α oznacza kąt między wykresem funkcji a osią OX	↑ patrz rysunek
MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ zależy od współczynnika kierunkowego a	$a > 0$	funkcja jest rosnąca
	$a = 0$	funkcja jest stała
	$a < 0$	funkcja jest malejąca
PUNKTY PRZECIĘCIA WYKRESU FUNKCJI LINIOWEJ Z OSIAMI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH	współczynnik b	miejsce przecięcia osi OY w punkcie $(0; b)$
	miejsce zerowe	• dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$ (jego postać: $x_0 = -\frac{b}{a}$) • nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = b = 0$ • brak miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$

Zadania — wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji

ŁATWE DO PRZYSWOJENIA PARTIE MATERIAŁU

*W każdym z działów wyodrębniliśmy **podstawowe typy zadań, których można spodziewać się na maturze.***

POWTÓRKI W TRZECH KROKACH

Aby zapamiętać sposób rozwiązywania określonego typu zadań, stosujemy zasadę trzech kroków.

ZADANIE 241	zadanie do analizy

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Wtedy:

A. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

B. $\sin\alpha = \frac{5}{3}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$

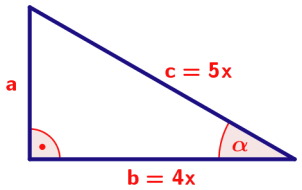
C. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α.

2° Jeżeli $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, to znaczy, że zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej jest równy $4 : 5$. Oznaczamy długości odpowiednich boków jako $4x$ i $5x$.

3° Trzeci bok oznaczamy jako a.
Jego długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + (4x)^2 = (5x)^2$$
$$a^2 + 16x^2 = 25x^2$$
$$a^2 = 25x^2 - 16x^2$$
$$a^2 = 9x^2$$
$$a = \sqrt{9x^2} = 3x$$

KROK 1

W pierwszym zadaniu analizujesz sposób rozwiązania.

4° Obliczamy wartość sinusa i tangensa dla kąta α.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

ZADANIE 242	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	CKE

Jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$ równa się:

A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{84}{25}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α.

2° Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to znaczy że, zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przyległej jest równy $3 : 4$. Oznaczamy długości odpowiednich boków jako $3x$ i $4x$.

3° Trzeci bok oznaczamy jako c. Jego długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

4° Obliczamy wartość $\cos\alpha$.

5° Obliczamy wartość wyrażenia $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$.

KROK 2

Drugie zadanie, które jest bardzo podobne, rozwiązujesz samodzielnie, korzystajac ze wskazówek.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 243	zadanie sprawdzające	1 pkt	maj 2014

Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, to wartość wyrażenia $\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ jest równa:

A. $-\frac{23}{11}$ B. $-\frac{11}{23}$ C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{24}{5}$

ROZWIĄZANIE

KROK 3

Ostatnie, trzecie zadanie, rozwiązujesz już całkowicie samodzielnie, opierając się na sposobie pokazanym wcześniej.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

warto wiedzieć...

Do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów większych z przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$ wystarczy nam umiejętność przedstawiania tych kątów w postaci: $180^\circ - \alpha$ oraz wiedza o tym, jaki znak przyjmują poszczególne funkcje trygonometryczne w drugiej ćwiartce układu współrzędnych.

Zadania — wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90°

ZADANIE 244	zadanie do analizy	1 pkt	CKE

Liczba $\sin 150^\circ$ jest równa liczbie:

A. $\cos 60^\circ$ B. $\cos 120^\circ$

UCZYSZ SIĘ TEGO, CO WYMAGANE I PRAWDOPODOBNE NA MATURZE

W książce znajdują się zarówno zadania autorskie, jak i zadania z matur i propozycji Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, dzięki czemu uczysz się tego, co jest wymagane i najbardziej prawdopodobne na maturze.

ROZWIĄZANIE

1° Zamieniamy kąt 150° na różnicę kątów postaci 1

2° Redukujemy kąt o 180° zgodnie ze wzorem redu
opuszczamy kąt 180°, uwzględniając znak sinusa. Kąt 150° to druga ćwiartka układu współrzędnych, więc sinus dla tego kąta jest dodatni.

3° Odczytujemy wartość sinusa kąta 30°. $= \frac{1}{2} =$

4° Taką samą wartość jak $\sin 30^\circ$ ma $\cos 60^\circ$. $= \cos 60^\circ$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: A

ZADANIE 245	zadanie ze wskazówkami	1 pkt	

Wartość $\cos 120^\circ$ wynosi:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

1° Zamieniamy kąt 120° na różnicę kątów postaci $180^\circ - \alpha$.

2° Redukujemy kąt o 180° zgodnie ze wzorem redukcyjnym, czyli opuszczamy kąt 180°, uwzględniając znak cosinusa.

3° Odczytujemy odpowiednią wartość.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ROZWIĄZANIE

2° Długość odcinka x obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$1^2 + x^2 = 5^2$$
$$x^2 = 25 - 1$$
$$x^2 = 24$$
$$x = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

3° Obliczamy $\sin\alpha$ z definicji funkcji sinus.

$$\sin\alpha = \frac{x}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: D

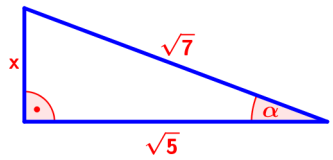
ODPOWIEDŹ DO ZADANIA 240 | 1 pkt

Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek). Tangens kąta ostrego α jest równy:

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{35}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{7}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, oznaczając długość trzeciego boku jako x.



2° Długość odcinka x obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$x^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{7})^2$$
$$x^2 + 5 = 7$$
$$x^2 = 7 - 5$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

3° Obliczamy $\operatorname{tg}\alpha$ z definicji funkcji tangens.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: B

Odpowiedzi — wyznaczanie wartości trygonometrycznych, gdy dana jest w

ODPOWIEDZI DO WSZYSTKICH ZADAŃ WYJAŚNIONE „KROK PO KROKU"

Odpowiedzi do zadań ze wskazówkami i sprawdzających, które rozwiązywałeś samodzielnie, znajdziesz kilka stron dalej.

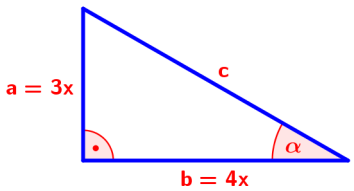
ODPOWIEDŹ DO ZADANIA 242

Jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{2 - \cos\alpha}{2 + \cos\alpha}$ równa się:

A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{84}{25}$

ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α.



2° Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to znaczy, że zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przyległej jest równy $3 : 4$. Oznaczamy długości odpowiednich boków jako $3x$ i $4x$.

7 Podsumowanie

http://jakzdacmaturezmatematyki.pl/142/podsumowania/7

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzednich działów. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

GOTOWE POWTÓRKI PO KAŻDYM DZIALE

*Po każdym dziale znajduje się podsumowanie, w którym są zarówno **zadania z danego działu, jak i wszystkich poprzednich**, dzięki czemu **systematycznie powtarzasz i utrwalasz swoją wiedzę.***

W przypadku problemów skorzystaj ze wskazówki ... zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu

WERSJA ON-LINE POLICZY TWOJE PUNKTY

*Kod QR przeniesie Cię do **wersji on-line podsumowania na stronie jakzdacmaturezmatematyki.pl**, gdzie będziesz mógł **sprawdzić uzyskany przez Ciebie wynik.***

... powiedź.

... e 675 zł. C

A. 742,50 zł B. 607,50 zł

ZAD. P.7.2 (0-1) Wyrażenie $x(x-3)(x+3)$ jest równe:

A. x^2-9 B. x^3-9 C. x^3-9x D. x^3+9x

zobacz zad 50

ZAD. P.7.3 (0-1) (czerwiec 2014) Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy:

A. $\sqrt{108}$ B. $\frac{15}{2}$ C. 15 D. $\frac{\sqrt{108}}{2}$

zobacz zad 269

ZAD. P.7.4 (0-1) Dany jest kąt ostry α i $\sin\alpha=\frac{2}{7}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha-1$ jest równa:

A. $\frac{9}{7}$ B. $-\frac{4}{49}$ C. $\frac{4}{49}$ D. $\frac{46}{49}$

zobacz zad 251

ZAD. P.7.5 (0-1) Największą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}>\frac{3x}{4}$ jest:

A. 1 B. 0 C. 2 D. -1

zobacz zad 165

ZAD. P.7.6 (0-1) Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y=2(x+8)(x-3)$ są:

A. $x_1=8, x_2=-3$ B. $x_1=-8, x_2=3$ C. $x_1=-8, x_2=-3$ D. $x_1=8, x_2=3$

zobacz zad 143

ZAD. P.7.7 (0-1) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n=\sqrt{3n+1}$ dla $n\geq 1$. Wówczas:

A. $a_8=25$ B. $a_8=5\sqrt{5}$ C. $a_8=5\sqrt{2}$ D. $a_8=5$

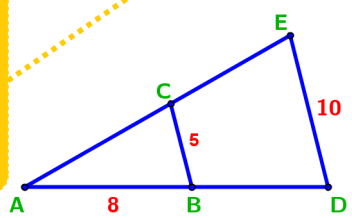
zobacz zad 206

ZAD. P.7.8 (0-1) Odcinki BC i DE są równoległe. Długości AB, BC i DE są odpowiednio równe 8, 5 i 10. Długość odcinka BD jest równa:

A. 16
B. 8
C. 4
D. 6

W PRZYPADKU PROBLEMÓW - WSKAZÓWKI

*Jeśli masz problem z rozwiązaniem któregoś z zadań, skorzystaj ze wskazówki, **która wskaże Ci zadanie podobne lub potrzebny wzór.***



zobacz zad 271

ZAD. P.7.9 (0-1) W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC|=|BC|=13$ oraz $|AB|=10$. Wysokość opuszczona na podstawę AB jest równa:

A. $\sqrt{69}$ B. 12 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{194}$

zobacz zad 259

ZAD. P.7.10 (0-1) Promień okręgu opisanego na kwadracie wynosi $7\sqrt{2}$. Obwód kwadratu wynosi:

A. 49 B. 28 C. 196 D. 56

zobacz zad 263

Odpowiedzi do podsumowań 1-10

POdSuMOWaNIE NR 1

P. 1.1 B P. 1.2 B P. 1.3 C P. 1.4 B P. 1.5
P. 1.11 D P. 1.12 D P. 1.13 C P. 1.14 A P. 1.15

WSZYSTKO MOŻESZ SPRAWDZIĆ SAMODZIELNIE

Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań z podsumowań. W przypadku dowodów zamieściliśmy również pełne rozwiązania, żebyś mógł dokładnie przeanalizować sposób rozwiązania.

POdSuMOWaNIE NR 2

P. 2.1 C P. 2.2 D P. 2.3 C P. 2.4 B P. 2.5
P. 2.11 B P. 2.12 B P. 2.13 A P. 2.14 C P. 2.15 A

P. 2.16 $(n+2)^2-n^2=n^2+2\cdot 2\cdot n+2^2-n^2=4n+4=4\cdot\underbrace{(n+1)}_{k\in\mathbb{C}}=4k$ Wyrażenie jest podzielne przez 4.

P. 2.17 $4^{n+2}+3\cdot 5^{n+1}-4^n=4^n\cdot 4^2+3\cdot 5^n\cdot 5^1-4^n=16\cdot 4^n+15\cdot 5^n-4^n=$
$=15\cdot 4^n+15\cdot 5^n=15\cdot\underbrace{(4^n+5^n)}_{k\in\mathbb{C}}=15k$

Otrzymaliśmy iloczyn liczby 15 i liczby całkowitej, czyli wielokrotność liczby 15.

P. 2.18 $(4n+1)^2-(4m-1)^2=(4n)^2+2\cdot 4n+1^2-\left[(4m)^2-2\cdot 4m+1^2\right]=$
$=16n^2+8n+1-(16m^2-8m+1)=16n^2+8n+1-16m^2+8m-1=$
$=16n^2+8n+\cancel{1}-16m^2+8m-\cancel{1}=16n^2+8n-16m^2+8m=$
$=8\cdot(2n^2+n-2m^2+m)=8\cdot\underbrace{(2n^2+n-2m^2+m)}_{k\in\mathbb{C}}=8k$

Liczba jest podzielna przez 8.

P. 2.19 $\frac{k^2+6k+25}{k+3}\geq 8 \quad \Big|\cdot(k+3)$
$k^2+6k+25\geq 8(k+3)$
$k^2+6k+25\geq 8k+24$
$k^2-2k+1\geq 0$
$(k-1)^2\geq 0$

Dla każdego $k\in\mathbb{R}_+$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

P. 2.20 $a^4\geq b(2a^2-b)$
$a^4\geq 2a^2b-b^2$
$a^4-2a^2b+b^2\geq 0$
$(a^2-b)^2\geq 0$

Dla każdej liczby rzeczywistej a i b wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

POdSuMOWaNIE NR 3

P. 3.1 D P. 3.2 B P. 3.3 D P. 3.4 A P. 3.5 B P. 3.6 D P. 3.7 D P. 3.8 C P. 3.9 C P. 3.10 C
P. 3.11 B P. 3.12 B P. 3.13 A P. 3.14 C P. 3.15 D

P. 3.16 $5^{10}+2\cdot 5^9+5^8=5^8(5^2+2\cdot 5+1)=5^8(25+10+1)=36\cdot\underbrace{5^8}_{k\in\mathbb{C}}=36k$ Liczba jest więc podzielna przez 36.

P. 3.17 n — pierwsza liczba całkowita
$n+1$ — druga liczba całkowita
$n+2$ — trzecia liczba całkowita
$n+3$ — czwarta liczba całkowita

$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n+9=$
$=4n^2+12n+12+2=4\underbrace{(n^2+3n+3)}_{k\in\mathbb{C}}+2=4k+\underbrace{2}_{reszta}$